Übungsaufgaben zur Vorlesung
PDE — SS 2019, Serie 8
Prof. Dr. G. Wang — 24.6.19
Dr. F. Dittberner

Aufgabe 1 (*Unterlösungen*) (4 Punkte)

Wir definieren wie in Lemma 6.21

$$\mathcal{S}_\phi = \{v \,|\, v \in C(\overline{\Omega}) \text{ ist eine Unterlösung in } \Omega \text{ und } v \leq \phi \text{ auf } \partial\Omega\}.$$

Zeigen Sie: Sind $v_1, v_2, \ldots, v_k$ in $\mathcal{S}_\phi$, so auch

$$v = \max\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}\,.$$

Aufgabe 2 (*Barrieren*) (8 Punkte)

Zeigen Sie Lemma 6.22:
Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und L einer Operator gegeben wie in Bedingung 6.1. Seien a_{ij}, b_i und c C^α-Funktionen in Ω für ein $\alpha \in (0,1)$, $c \leq 0$ in Ω. Seien $f \in L^\infty(\Omega) \cap C^\alpha(\Omega)$, $\phi \in C(\partial\Omega)$ und u_ϕ wie in Lemma 6.21 definiert. Für einen Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ existiere eine Barriere-Funktion $w_{x_0} \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, d.h., die die folgenden Eigenschaften

$$\begin{array}{rcll} -Lw_{x_0} & \geq & 1 & \text{in } \Omega, \\ w_{x_0}(x_0) & = & 0, & \\ w_{x_0}(x) & > & 0, & \forall x \in \partial\Omega \backslash \{x_0\}, \end{array}$$

erfüllt. Dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} u_\phi(x) = \phi(x_0).$$

Hinweis. Der Beweis ist ähnlich wie der Beweis von Theorem 5.18.

Aufgabe 3 (*Differenzquotient*) (4 Punkte)

Zeigen Sie Lemma 6.26:
Es seien k eine positive Ganzzahl, u stetige Funktion in Ω und $\Omega' \subset\subset \Omega$.

1. *Falls $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, dann ist $\partial_l^h u \in C^{k-1,\alpha}(\Omega')$ und es gilt*

$$|\partial_l^h u|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega')} \leq C|u|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$$

für alle $|h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, wobei $C > 0$ nur von n, k und α abhängt.

2. *Es gelte* $\partial_l^h u \in C^{k-1,\alpha}(\Omega')$ *mit*

$$|\partial_l^h u|_{C^{k-1,\alpha}(\Omega')} \leq M$$

für alle $|h| < \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ *und* $l = 1, 2, \ldots, n$. *Dann ist* $u \in C^{k,\alpha}(\Omega')$ *mit*

$$|u|_{C^{k,\alpha}(\Omega')} \leq CM,$$

wobei $C > 0$ *nur von* n, k *und* α *abhängt.*

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 1.7., vor der Vorlesung**.