Übungsaufgaben zur Vorlesung
PDE — SS 2019, Serie 9
Prof. Dr. G. Wang — 1.7.19
Dr. F. Dittberner

Aufgabe 1 (*Kontaktmenge*) (2+2+2+2 Punkte)

Zeigen Sie Bemerkung 7.2 (Definitionen in Definition 7.1):

1. Seien $u \in C^2(\Omega)$ und $\nabla^2 u = (\partial_{ij} u)$ die Hessesche von u. Dann ist $\nabla^2 u$ in Γ^+ nicht-positiv semidefinit.
2. $u \in C(\Omega)$ ist genau dann konkav, wenn $\Gamma^+ = \Omega$.
3. Wenn $u \in C^1(\Omega)$, dann ist $p = \nabla u(x)$ und jede Stützebene ist eine Tangentialebene an $\operatorname{graph} u$.
4. $\Gamma^+ = \{y \in \Omega \,|\, \tau_u(y) \neq \emptyset\}$.

Aufgabe 2 (*Die Menge der Steigerungen*) (4 Punkte)

(a) Sei $v \in C(B_R(x_0))$ definiert durch

$$v(x) := h\left(1 - \frac{|x - x_0|}{R}\right).$$

Der Graph von v ist ein Kegel mit Spitze der Höhe h im Nullpunkt und der Sphäre $\partial B_R(x_0)$ als Basis. Bestimmen Sie $\tau_v(y)$ für allen $y \in B_R(x_0)$.

(b) Seien Ω beschränkt und konvex und $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ eine konkave Funktion mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Fixiere $x_0 \in \Omega$. Sei v eine konkave Funktion, dessen Graph ein Kegel mit Spitze $(x_0, u(x_0))$ ist, wobei Ω Basis von v ist und $v = 0$ auf $\partial\Omega$. Für $\tilde{x} \in \partial\Omega$ ist v ist gegeben durch $v(tx_0 + (1-t)\tilde{x}) = tu(x_0)$. Setze

$$\mathcal{S} := \tau_v(x_0) = \{p \in \mathbb{R}^n \,|\, v(x) \leq v(x_0) + p \cdot (x - x_0) \text{ in } \Omega\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{S}$ konvex ist und

$$\mathcal{S} \subset \nabla u(\Omega)$$

gilt.

Aufgabe 3 (*Elliptizität*) (4 Punkte)

Definition 1.3 (Elliptizität). Sei $F \in C^1\big(\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega\big)$. Eine Differentialgleichung $F(D^2u, Du, u, \cdot) = 0$ zweiter Ordnung mit $F = F(r_{ij}, p_i, z, u, x)$ heißt (in x entlang einer Lösung u) *elliptisch*, falls die Ableitung $(a^{ij})_{i,j} \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(D^2u(x), Du(x), u(x), x)\right)_{i,j}$ symmetrisch und positiv definit ist.

Es sei $u \in C^2(\Omega)$ in dem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Lösung der Monge–Ampère-Gleichung

$$\det(\partial_{ij}u(x)) = f(x)$$

mit positivem f. Es gebe ein $x_0 \in \Omega$, in dem die Hessesche von u positiv definit ist. Zeigen Sie, dass die Gleichung dann bei u in ganz Ω elliptisch ist. (Der Einfachheit halber betrachten Sie nur $n = 2$. In diesen Fall ist $\det(\partial_{ij}u(x)) = u_{11}(x)u_{22}(x) - u_{12}^2(x)$.)

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 8.7., vor der Vorlesung**.