Die parabolische Metrik auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$d(p_1, p_2) := \max\{|x_1 - x_2|, |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}}\}, \quad \text{wobei } p_i = (x_i, t_i) \text{ ist.}$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sei $T > 0$ und setze $\Omega_T := \Omega \times (0, T)$.

$$C^{(2,1)}(\Omega_T) := \{u \in C^0(\Omega_T) : \nabla u, \nabla^2 u, \partial_t u \in C^0(\Omega_T)\}$$

$$[u]_{\alpha,\Omega_T} := \sup\left\{\frac{|u(p) - u(q)|}{d(p,q)^\alpha} : p, q \in \Omega_T, p \neq q\right\} \quad \text{für } \alpha \in (0,1]$$

$$[D^{2,1}u]_{\alpha,\Omega_T} := [\nabla^2 u]_{\alpha,\Omega_T} + [\partial_t u]_{\alpha,\Omega_T}$$

$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega_T}) := \{u \in C^0(\overline{\Omega_T}) : [u]_{\alpha,\Omega_T} < \infty\}$$

$$C^{(2,1),\alpha}(\overline{\Omega_T}) := \{u \in C^{(2,1)}(\overline{\Omega_T}) : [D^{2,1}u]_{\alpha,\Omega_T} < \infty\}$$

Aufgabe 1 (*Parabolische Höldernormen*)
Zeigen Sie, dass $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega_T})$ ein Banachraum ist.

Aufgabe 2 (*Parabolisches Taylorpolynom*)
Sei $U_\varrho(0) := \{p \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : d(0,p) < \varrho\}$. Das *parabolische Taylorpolynom* von $u \in C^{(2,1)}(U_\varrho(0))$ im Punkt $p_0 = 0$ ist gegeben durch

$$P_0(u)(x,t) := u(0) + \nabla u(0)x + \frac{1}{2}\nabla^2 u(0)(x,x) + \partial_t u(0)t.$$

Zeigen Sie für $p = (x,t)$ die Abschätzung

$$|u(p) - P_0(u)(p)| \leq [D^{1,2}u]_{\alpha,U_\varrho(0)}\, d(0,p)^{2+\alpha}.$$

Aufgabe 3 (*Differentialoperatoren in Hölderräumen*)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Sehnen-Bogen-Bedingung. Für Koeffizienten $a^{ij}, b^i, q \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ betrachten wir den Operator

$$L : C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), Lu := -a^{ij}\partial_{ij}^2 u + b^i \partial_i u + qu.$$

Zeigen Sie, dass L eine stetige, lineare Abbildung ist.

Aufgabe 4 (*Der Kern eines elliptischen Operators*)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet der Klasse $C^{2,\alpha}$ mit $\alpha \in (0,1)$. Sei L wie in Aufgabe 3, mit a^{ij} elliptisch mit Konstante $\lambda > 0$. Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 8.6 der Vorlesung: $\ker L$ ist mit der C^0-Norm ein Banachraum, mit kompakter Einheitskugel

$$K := \{u \in \ker L : \|u\|_{C^0(\Omega)} \leq 1\}.$$

Bemerkung: In der Funktionalanalysis wird gezeigt: Die Einheitskugel eines Banachraums ist genau dann kompakt, wenn der Banachraum endlichdimensional ist. Insbesondere gilt somit: $\dim\ker L < \infty$.

Abgabe am Montag den 24.01.2011.