

Aufgabe 1 (*Das Bild eines elliptischen Operators*)

Sei L der Operator aus Aufgabe 3 von Serie 10. Zeigen Sie indirekt: Ist $X \subset C_0^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ ein abgeschlossener Unterraum mit $\ker L \cap X = \{0\}$, so gibt es eine Konstante $C < \infty$ mit

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C \|Lu\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \quad \text{für alle } u \in X,$$

und $L(X)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Aufgabe 2 (*Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $u \in C^\infty(\Omega)$ harmonisch ($\Delta u = 0$). Zeigen Sie:

1. $u(x_0) = \int_{\partial B_r(x_0)} u \, d\mu_{\partial B_r(x_0)}$ für alle $B_r(x_0) \subset\subset \Omega$
2. $u(x_0) = \int_{B_r(x_0)} u \, d\mathcal{L}^n$ für alle $B_r(x_0) \subset\subset \Omega$

Hinweis: Betrachten Sie die Hilfsfunktion $\phi(r) = \int_{\partial B_r(x_0)} u \, d\mu_{\partial B_r(x_0)}$ und verwenden Sie den Satz von Gauß.

Aufgabe 3 (*Abschätzungen von Cauchy*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie: Zu $k \in \mathbb{N}_0$ existieren Konstanten $C = C(n, k) < \infty$ mit folgender Eigenschaft: Ist $u \in C^\infty(\Omega)$ harmonisch in Ω und $B_r(x_0) \subset\subset \Omega$, so gilt:

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C(n, k)}{r^k} \int_{B_r(x_0)} |u| \, d\mathcal{L}^n$$

für alle Multiindices α mit $|\alpha| = k$.

Hinweis: Verwenden Sie induktiv Aufgabe 2.

Aufgabe 4 (*Satz von Liouville*)

Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabe 3:

Sei $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ harmonisch mit $|u(x)| \leq C(1 + |x|^{k+\alpha})$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, ein $k \in \mathbb{N}_0$ und ein $\alpha \in [0, 1)$. Dann ist u ein Polynom vom Grad höchstens k .

Abgabe am Montag den 31.01.2011.