

Aufgabe 1 (*schwache Ableitung*)

Betrachten Sie folgende, auf $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ definierte, Funktion:

$$u(x) := |x|^{-\alpha} \quad \text{für } x \neq 0 \text{ und } u(0) := 0.$$

Für welche Werte von $\alpha > 0$, n , p hat u eine schwache Ableitung in $L^p(B_1(0))$?

Aufgabe 2 (*Euler-Lagrange-Gleichung für einen quadratischen Integranden*)

Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für

1. $\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} (A_{ij}^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} u^i \partial_{\beta} u^j + C_{ij} u^i u^j) d\mathcal{L}^n$ und
2. $\mathcal{W}(u) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |\partial_t u(x, t)|^2 - |D_x u(x, t)|^2 dx dt.$

Warum besitzt $\mathcal{W}$ keinen Minimierer $u \in C^1(\overline{\Omega} \times [0, T])$?

Aufgabe 3 (*zum Fundamentallemma der Variationsrechnung*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1 -Gebiet und sei $u \in C^0(\overline{\Omega})$. Für alle $\varphi \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ gelte:

$$\int_{\partial\Omega} u \varphi d\mathcal{H}^{n-1} = 0.$$

Zeigen Sie, dass $u = 0$ auf $\partial\Omega$.

Aufgabe 4 (*Kapillarflächen*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1 -Gebiet. Betrachten Sie für $\kappa, \sigma \in \mathbb{R}$ das Funktional

$$\mathcal{F} : C^2(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$$

gegeben durch

$$\mathcal{F}(u) := \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} d\mathcal{L}^n + \frac{\kappa}{2} \int_{\Omega} u^2 d\mathcal{L}^n + \sigma \int_{\partial\Omega} u d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Bestimmen Sie die erste Variation $\delta\mathcal{F}(u, \varphi)$ von $\mathcal{F}$ und die resultierenden Differentialgleichungen in Ω und $\partial\Omega$ falls $\delta\mathcal{F}(u, \varphi) = 0$ für alle $\varphi \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$. Interpretieren Sie die Randbedingungen geometrisch.

Abgabe am FREITAG 29.10.2010. zwischen 10:00 Uhr und 11:00 Uhr in Raum 203