

Aufgabe 1

Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass $u^+, |u| \in W^{1,p}(\Omega)$ und

$$\begin{aligned} Du^+ &= \chi_{\{u>0\}} Du \quad \mathcal{L}^n\text{-fast überall} \\ D|u| &= \chi_{\{u>0\}} Du - \chi_{\{u<0\}} Du \quad \mathcal{L}^n\text{-fast überall.} \end{aligned}$$

Zeigen Sie außerdem, dass

$$Du = 0 \quad \mathcal{L}^n\text{-fast überall auf } \{u = 0\}.$$

Tipp: Betrachten Sie für $\varepsilon > 0$ die Funktionen

$$F_\varepsilon(r) := \begin{cases} \sqrt{r^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon & ; r \geq 0 \\ 0 & ; r < 0. \end{cases}$$

Aufgabe 2

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexes Gebiet und sei $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen Sie, dass

$$u \in Lip(\Omega) \Leftrightarrow u \in W^{1,\infty}(\Omega).$$

Aufgabe 3

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Zeigen Sie folgende Implikation:

$$Du = 0 \quad \Rightarrow \quad u \text{ ist fast überall konstant}$$

Aufgabe 4

Sei $u \in W^{1,p}((0,1))$ mit $p \in (1, \infty)$. Zeigen Sie:

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |u'|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } \mathcal{L}^1\text{-fast alle } x, y \in (0,1).$$

Abgabe am Montag den 08.11.2010. vor der Vorlesung.