Partielle Differentialgleichungen | WS 10, Serie 3
Prof. Dr. E. Kuwert | 12. November 2010
Alexander Volkmann

Aufgabe 1 *(Projektion)*
Sei $(H, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum und sei $A \subset H$ ein nicht-leerer, abgeschlossener, linearer Teilraum von H. Dann gibt es für alle $f \in H$ genau ein $f_1 \in A$ und genau ein $f_2 \in A^\perp$ mit $f = f_1 + f_2$. Dabei ist $A^\perp$ wie folgt erklärt

$$A^\perp := \{g \in H : (f,g) = 0 \quad \text{für alle } f \in A\}.$$

Aufgabe 2 *(Lipschitzgebiet)*
Definition: Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt Lipschitz-Gebiet, falls es für alle $x \in \partial\Omega$ (nach geeigneter Umnummerierung der Koordinaten) eine offene Umgebung U von x und eine Funktion $u \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^{n-1})$ gibt, sodass

$$\Omega \cap U = \{(x,y) \in U : u(x) > y\}.$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-Gebiet. Zeigen Sie, dass es für alle $x \in \partial\Omega$ eine offene Umgebung U von x und eine eine Bi-Lipschitzabbildung $\phi : U \to \phi(U)$ gibt, sodass Folgendes gilt:

$$\phi(\Omega \cap U) = \mathbb{H} \cap \phi(U), \quad \text{wobei } \mathbb{H} = \mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, 0).$$

Zeigen Sie, dass die Umkehrung nicht gilt. Betrachten Sie dazu folgende Funktion: $\phi : (r,\theta) \mapsto e^{i\varphi(r)} r e^{i\theta}$ mit einer geeignet gewählten Funktion φ.

Aufgabe 3 *(Gegenbeispiel zum Satz von Rellich)*
Sei

$$\Omega := (0,1) \times (-1,1) \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} Z_j, \quad \text{wobei } Z_j := \{2^{-j}\} \times [0,1],$$

und sei $\varphi_k : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Folge, gegeben durch

$$\varphi_k(x,y) := \begin{cases} c_k & ; 2^{-(k+1)} < x < 2^{-k}, y \geq \frac{1}{2} \\ 2c_k y & ; 2^{-(k+1)} < x < 2^{-k}, 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ 0 & ; \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass zu geeignet gewählter Folge c_k gilt: φ_k ist eine in $W^{1,1}(\Omega)$ beschränkte Folge, die keine in $L^1(\Omega)$ konvergente Teilfolge besitzt.

Aufgabe 4 *(zum Satz von Arzelà-Ascoli)*
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und sei $\gamma_k \in C^1([0,1], K)$ eine Folge von regulären (d.h. $\gamma_k'(t) \neq 0$ für alle $t \in [0,1]$) Kurven mit

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} L(\gamma_k) \leq C < \infty.$$

Zeigen Sie, dass es eine stetige Kurve $\gamma : [0,1] \to K$ und Umparametrisierungen φ_k gibt, sodass

$$\gamma_k \circ \varphi_k \to \gamma \quad \text{in } C^0.$$

Abgabe am Montag den 15.11.2010 vor der Vorlesung.