Partielle Differentialgleichungen | WS 10, Serie 4
Prof. Dr. E. Kuwert | 17. November 2010
Alexander Volkmann

Aufgabe 1 *(Poincaré mit Mittelwert)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand. Zeigen Sie durch Widerspruch:

Es gibt eine Konstante $C > 0$, sodass für alle $u \in W^{1,2}(\Omega)$ mit $\int_\Omega u \, d\mathcal{L}^n = 0$ gilt:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^2(\Omega)}.$$

Aufgabe 2 *(Neumann-Problem)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^1-Rand und äußerer Normale ν. Betrachten Sie für $a^{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$ den schwach definierten Operator

$$L : W^{1,2}(\Omega) \to W^{1,2}(\Omega)', Lu := -\sum_{\alpha,\beta=1}^n \partial_\beta(a^{\alpha\beta}\partial_\alpha u),$$

wobei a symmetrisch und elliptisch mit Konstante $\mu > 0$ sei. Zeigen Sie:

1. Für $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ und $a^{\alpha\beta} \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ ist die Gleichung $Lu = f$ äquivalent zu

$$-\sum_{\alpha,\beta=1}^n \partial_\beta(a^{\alpha\beta}\partial_\alpha u) = f \quad \text{in } \Omega, \qquad \sum_{\alpha,\beta=1}^n \partial_\alpha u \, a^{\alpha\beta}\nu_\beta = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

2. Für $f \in L^2(\Omega)$ ist die Gleichung $Lu = f$ genau dann lösbar, wenn $\int_\Omega f \, d\mathcal{L}^n = 0$ ist.
   Tipp: Fassen Sie den Operator L als Abbildung von X nach X' auf, wobei $X := \{u \in W^{1,2}(\Omega) : \int_\Omega u \, d\mathcal{L}^n = 0\}$.

Aufgabe 3 *(Schwingungsgleichung)*
Betrachten Sie für $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ den Operator $L_\lambda : W_0^{1,2}(I) \to W_0^{1,2}(I)'$, $L_\lambda u := u'' + \lambda u$.

1. Zeigen Sie folgende Implikation:

   u ist schwache Lösung von $Lu = 0 \Rightarrow$ u ist klassische Lösung von $u'' + \lambda u = 0$.

2. Bestimmen Sie $\ker(L_\lambda)$ und $\mathrm{Bild}(L_\lambda)$.

Abgabe am Montag den 22.11.2010 vor der Vorlesung.