

Aufgabe 1 (*Geradebiegen des Randes*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet der Klasse C^1 , d.h. für alle $x_0 \in \partial\Omega$ existiere eine offene Umgebung U von x_0 und ein C^1 -Diffeomorphismus $\varphi : U \rightarrow B_1(0)$ mit $\psi := \varphi^{-1}$, sodass

$$\varphi(\Omega \cap U) = B_1(0)^+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in B_1(0) : x_n > 0\}.$$

$u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ sei eine schwache Lösung der elliptischen PDE

$$-\partial_\beta(a^{\alpha\beta}\partial_\alpha u) - \partial_\beta(b^\beta u) + c^\alpha\partial_\alpha u + qu = \Lambda \quad \text{in } \Omega,$$

wobei $a^{\alpha\beta}, b^\alpha, c^\alpha, q \in L^\infty(\Omega)$ und $\Lambda \in W_0^{1,2}(\Omega)'$ seien. Welche Gleichung erfüllt $v := u \circ \psi$ in $B_1(0)^+$?

Aufgabe 2 (*Ehrling-Lemma*)

Sei $K \in L(X, Y)$ ein kompakter Operator und sei $T \in L(Y, Z)$ injektiv. Zeigen Sie durch Widerspruch, dass es für alle $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C(\varepsilon) < \infty$ gibt, sodass für alle $x \in X$ gilt:

$$\|Kx\|_Y \leq \varepsilon\|x\|_X + C(\varepsilon)\|TKx\|_Z.$$

Aufgabe 3 (*Hilbertraum-Adjungierte*)

1. Es seien $(X, (\cdot, \cdot)_X)$ und $(Y, (\cdot, \cdot)_Y)$ Hilberträume und $T \in L(X, Y)$. Zeigen Sie die Existenz eines Operators $T^* \in L(Y, X)$, so dass für alle $x \in X$ und $y \in Y$ gilt:

$$(Tx, y)_Y = (x, T^*y)_X. \tag{1}$$

Zeigen Sie zudem, dass T^* durch (1) eindeutig bestimmt ist. T^* heißt die Hilbertraum-Adjungierte zu T .

2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Betrachten Sie den Operator

$$D : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega, \mathbb{R}^n), u \mapsto Du = (\partial_1 u, \dots, \partial_n u).$$

Bestimmen Sie die Hilbertraum-Adjungierte $D^* : L^2(\Omega, \mathbb{R}^n) \rightarrow W_0^{1,2}(\Omega)$ zu D . Hierbei sind wie üblich für $u_1, u_2 \in W_0^{1,2}(\Omega)$ und $v_1, v_2 \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$

$$(u_1, u_2)_{W^{1,2}} = \int_{\Omega} (u_1 u_2 + \langle Du_1, Du_2 \rangle) d\mathcal{L}^n \quad \text{und} \quad (v_1, v_2)_{L^2} = \int_{\Omega} \langle v_1, v_2 \rangle d\mathcal{L}^n.$$

Abgabe am Montag den 29.11.2010 vor der Vorlesung.