Partielle Differentialgleichungen WS 10, Serie 6
Prof. Dr. E. Kuwert 29. November 2010
Alexander Volkmann

Aufgabe 1 *(Garding'sche Ungleichung)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $a_{ij}^{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$ elliptisch mit Konstante $\lambda > 0$, d.h.

$$a_{ij}^{\alpha\beta}\xi^i\xi^j\eta_\alpha\eta_\beta \geq \lambda|\xi|^2|\eta|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m, \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie mit Fouriertransformation, dass

$$B(u,u) \geq \lambda \|Du\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^m)} \quad \forall u \in C_c^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m).$$

Hierbei ist wie üblich

$$B(u,v) := \int_\Omega a_{ij}^{\alpha\beta}\partial_\alpha u^i \partial_\beta v^j \, d\mathcal{L}^n$$

Aufgabe 2 *(Koordinatentransformation)*
Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $\phi : U \to V$ bi-Lipschitz ($\psi := \phi^{-1}$) mit

$$\|D\phi\|_{W^{k,\infty}(U)}, \|D\phi\|_{W^{k,\infty}(U)} \leq \Lambda,$$

für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie: Mit $v \in W^{k+1,p}(V)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ ist auch $u := v \circ \phi \in W^{k+1,p}(U)$ und es gilt die Kettenregel

$$Du = ((Dv) \circ \phi) D\phi$$

und die Abschätzung

$$\|u\|_{W^{k+1,p}(U)} \leq C(\Lambda, n)\|v\|_{W^{k+1,p}(V)}.$$

Aufgabe 3 *(PDE im Distributionssinn)*
Sei $u(x) := \chi_{B_1(0)\setminus\{0\}} \frac{x}{|x|} \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie: u löst $-\Delta u = |Du|^2 u$ im *Distributionssinn*, d.h.

$$\int_{B_1(0)} \langle Du, D\phi\rangle \, d\mathcal{L}^3 = \int_{B_1(0)} |Du|^2 \langle u, \phi\rangle \, d\mathcal{L}^3 \quad \forall \phi \in C_c^\infty(B_1(0), \mathbb{R}^3).$$

Hierbei ist $\langle (a^i_j), (b^k_l)\rangle := a^i_j b^j_i$ und $|\cdot| := \langle \cdot,\cdot\rangle^{\frac{1}{2}}$.

Aufgabe 4 *(A priori Abschätzung)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W^{-1,2}(\Omega)$ gegeben durch

$$Lu = -\partial_i(a^{ij}\partial_j u) - \partial_i(b^i u) + c^i\partial_i u + qu.$$

Hierbei sei a^{ij} elliptisch mit Elliptizitätskonstante λ,

$$\|a^{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}, \|b^i\|_{L^\infty(\Omega)}, \|c^i\|_{L^\infty(\Omega)}, \|q\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$$

und $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Sei $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ schwache Lösung von

$$Lu = -\mathrm{div} f.$$

Beweisen Sie die folgende a priori Abschätzung:

$$\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C(\lambda, M, \mathrm{diam}(\Omega))(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}).$$

Abgabe am Montag den 06.12.2010 vor der Vorlesung.