Partielle Differentialgleichungen — WS 10, Serie 7
Prof. Dr. E. Kuwert — 6. Dezember 2010
Alexander Volkmann

Aufgabe 1 *(Hölder- und Sobolev-Exponenten)*
Sei $\gamma \in (0,1]$ und $u : B_1(0) \to \mathbb{R}$, $u(x) := |x|^\gamma$. Zeigen Sie:

1. $u \in C^{0,\alpha}(\overline{B_1(0)})$ genau dann wenn $0 < \alpha \leq \gamma$ und
2. $u \in W^{1,p}(B_1(0))$ genau dann wenn $1 - \frac{n}{p} < \gamma$.

Aufgabe 2 *(Kritischer Exponent)*
Sei $u : B_1(0) \to \mathbb{R}$, $u(x) := \log(\log(\frac{1}{|x|}))$, $n \geq 2$. Zeigen Sie $u \in W^{1,n}(B_1(0))$.

Aufgabe 3 *($W^{2,2}$-Regularität)*
Sei $A^i \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit

1. $|A^i(p)| \leq \Lambda |p|$, $|\partial_j A^i(p)| \leq \Lambda$ und
2. $\partial_j A^i(p) \eta_i \eta_j \geq \lambda |\eta|^2$ für alle $p, \eta \in \mathbb{R}^n$.

Sei $u \in W^{1,2}(\Omega)$ Lösung der Gleichung

$$\int_\Omega A^i(Du)\partial_i \varphi \, d\mathcal{L}^n = 0 \quad \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Zeigen Sie $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$ und

$$\|u\|_{w^{2,2}(\Omega')} \leq C \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)},$$

wobei $C = C(n, \lambda, \Lambda, \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega))$.
Hinweis: Durchdifferenzieren der Gleichung.

Abgabe am Montag den 13.12.2010 vor der Vorlesung.