Partielle Differentialgleichungen | WS 10, Serie 9
Prof. Dr. E. Kuwert | 10. Januar 2011
Alexander Volkmann

Aufgabe 1 (*Gegenbeispiel zur C^2-Regularität, Teil 1*)
Sei $B := B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine Funktion $u_\varepsilon \in C_c^\infty(B)$ mit

$$1 = \|\Delta u_\varepsilon\|_{C^0(B)} \leq \varepsilon \|D^2 u_\varepsilon\|_{C^0(B)} \quad \text{und} \quad \|u_\varepsilon\|_{C^0(B)} \leq \frac{1}{2n}.$$

Zeigen Sie dies in folgenden Schritten:

1. Die C^0-Schranke folgt aus $|\Delta u_\varepsilon| \leq 1$ mit dem Maximumprinzip.
2. Skalierung: Es reicht $v_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ zu finden mit
$$0 < \|\Delta v_\varepsilon\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon \|D^2 v_\varepsilon\|_{C^0(\mathbb{R}^n)}.$$
3. Zeigen Sie, dass die Funktion
$$v_\varepsilon(x) = \eta_\varepsilon(x)\langle Ax, x\rangle \quad \text{für } A \neq 0 \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ mit } \operatorname{tr}(A) = 0$$
die Eigenschaften in 2. hat, falls $\eta_\varepsilon(0) = 1, D\eta_\varepsilon(0) = 0, D^2\eta_\varepsilon(0) = 0$ und
$$|x||D\eta_\varepsilon(x)| + |x|^2|D^2\eta_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon.$$
4. Bestimmen Sie nun η_ε, z.B. $\eta_\varepsilon(|x|) = g(\varepsilon \log(\frac{1}{|x|}))$ für geeignetes g.

Aufgabe 2 (*Gegenbeispiel zur C^2-Regularität, Teil 2*)
Konstruieren Sie explizit $f \in C^0(\overline{B})$, so dass kein $u \in C^2(\overline{B})$, $u|_{\partial B} = 0$ existiert mit

$$-\Delta u = f.$$

Wählen Sie dazu eine Folge euklidischer Bälle $B_i := B_{\varrho_i}(x_i) \subset B$ mit $\varrho_i \searrow 0$, $|x_i| \to 0$ und $\overline{B}_i \cap \overline{B}_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Verwenden Sie dann Aufgabe 1 um die Funktion f zu konstruieren.
Hinweis: Sie dürfen die folgende Tatsache ohne Beweis verwenden: Sei u harmonisch auf $B \setminus \{0\}$, d.h. $\Delta u = 0$ in $B \setminus \{0\}$, und sei $u \in C^0(B)$, so ist $u \in C^\infty(B)$.

Aufgabe 3 (*Hölder-Räume*)
Bestimmen Sie $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ für $\alpha > 1$.

Abgabe am Montag den 17.01.2011.