Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE | WS 2020/2021, Serie 10
Prof. Dr. G. Wang | 18.1.2021
MSc. J. Metsch

Aufgabe 1 (*Radialsymmetrische Lösungen*) (4 Punkte)
Zeit $c > 0$. Zeigen Sie, dass alle radialsymmetrische Lösungen u von

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$$

die folgende Form haben:

$$u(x,t) = \frac{F(|x| - ct) + G(|x| + ct)}{|x|}$$

Aufgabe 2 (*Invarianz unter Lorentz-Transformation*) (4 Punkte)
Sei a eine Konstante mit $|a| < 1$.Zeigen Sie, dass die Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

ist erhalten, unter der *Lorentz-Transformation* invariant ist. Das heißt, dass mit

$$\begin{cases} s &= \dfrac{t - ax_1}{\sqrt{1-a^2}}, \\ y_1 &= \dfrac{x_1 - at}{\sqrt{1-a^2}}, \\ y_i &= x_i, \qquad \text{für } i = 2, 3. \end{cases}$$

auch $u(s, y_1, ..., y_n)$ eine Lösung der Wellengleichung ist.

Aufgabe 3 (*Regularitätsanforderungen*) (4 Punkte) Man beweise, dass die Regularitätsanforderungen an die Anfangsdaten für die Wellengleichung in drei Dimensionen

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= \varphi(x), \text{ für } x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(x,0) &= \psi(x), \text{ für } x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

im Allgemeinen notwendig sind. Das bedeutet, dass $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ im Allgemeinen notwendig ist, um $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ zu erhalten.

Hinweis. Man betrachte $\varphi = 0$ und ein konkretes radialsymmetrisches $\psi \in C^1$ mit $\psi|_{B_1(0)} = 0$. Zeigen Sie dann, dass die Abbildung $t \mapsto \Delta u(0,t)$ im Allgemeinen nicht für alle Zeiten stetig ist.

Aufgabe 4 (*Eine alternative Lösungsmethode*) (4 Punkte)
Seien $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ und $\psi \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Sei weiter $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ eine Lösung von

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ u(x,t) &= \varphi(x), \; \text{für } x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(x,t) &= \psi(x), \; \text{für } x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

(a) Für beliebiges $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$ definieren wir für $x \in B_{t_0}(x_0)\backslash\{x_0\}$ ein Vektorfeld $V(x)$ durch

$$V(x) := \left(\frac{Du(x,t)}{|x-x_0|} + u(x,t)\frac{x-x_0}{|x-x_0|^3} + u_t(x,t)\frac{x-x_0}{|x-x_0|^2} \right)\Bigg|_{t=t_0-|x-x_0|}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{div} V = 0.$$

(b) Leiten Sie eine Formel für $u(x_0,t_0)$ bzgl. φ und ψ durch Integrieren von $\operatorname{div} V$ in $B_{t_0}(x_0)\backslash B_\epsilon(x_0)$ mit $\epsilon \to 0^+$ her.

Bemerkung: Diese ist eine alternative Lösungsmethode.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 25.1. 21, 12:15 Uhr