Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE — WS 2020/2021, Serie 11
Prof. Dr. G. Wang — 25.1.2021
MSc. J. Metsch

Aufgabe 1 (*Verzerrungsfrei radialsymmetrische Lösungen*) (4 Punkte)
Wir sagen, dass in n Dimensionen *verzerrungsfreie radialsymmetrische Wellenausbreitung* möglich ist, falls es Funktionen $\alpha : (0,\infty) \to (0,\infty)$ und $\beta : (0,\infty) \to [0,\infty)$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

(1) Es gilt $\alpha(1) = 1$ und $\beta(0) = 0$.

(2) Für alle *sinnvollen* Funktionen $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist mit $r := |x|$

$$u(x,t) = \alpha(r)\phi(t - \beta(r))$$

eine Lösung der Wellengleichung.

Zeigen Sie, dass verzerrungsfreie radialsymmetrische Wellenausbreitung nur in $n = 1$ oder $n = 3$ Dimensionen möglich ist. Leiten Sie in diesen Fällen auch α und β her.

Aufgabe 2 (*Abschätzung*) (4 Punkte)
Sei $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beschränkt Funktion mit $\operatorname{supp}\psi \subset B_1(0)$.
Für $(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,\infty)$ setzen wir

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{B_t(x)} \frac{\psi(x)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}dy.$$

Zeigen Sie,dass für alle $\alpha \in (0,1)$

$$\sup_{B_{\alpha t}(0)} |u(\cdot,t)| \leq \frac{C(\alpha)}{t}\sup_{\mathbb{R}^2}|\psi| \qquad \text{für alle } t > 1,$$

gilt. Hierbei ist $C(\alpha)$ eine positive Konstante, die nur von α abhängt.

Aufgabe 3 (*Abstiegsmethode*) ($4 + 4^*$ Punkte)

a) Sei $\lambda > 0$ und $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ eine Lösung von

$$u_{tt} - \Delta u = -\lambda^2 u \text{ in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Betrachten Sie die Funktion $v : \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$v(x, x_{n+1}, t) = \{A\cos(\lambda x_{n+1}) + B\sin(\lambda x_{n+1})\}u(x,t).$$

definiert ist. Leiten Sie eine partielle Differentialgleichung für v her.

b) Sei $\lambda > 0$ und $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Lösen Sie das Problem

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= -\lambda^2 u & \text{in } \mathbb{R}^2 \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= 0, & \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \\ u_t(x,0) &= \psi(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

c) Sei $\lambda > 0$ und $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Lösen Sie das Problem

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= \lambda^2 u & \text{in } \mathbb{R}^2 \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= 0, & \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \\ u_t(x,0) &= \psi(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Aufgabe 4 (*Wellengleichung $n = 2$*) (4 Punkte)

Lösen das Problem

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= |x|^2, & \text{für } x \in \mathbb{R}^2, \\ u_t(x,0) &= 1, & \text{für } x \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 1.2. 21, 12:15 Uhr