Probeklausur zur Einführung in PDE WS 20/21

Prof. Dr. G. Wang 8.2.2021

MSc. Jan Metsch

Name: . . . . .Vorname: . . . .

Matr.Nr.: . . . .

Geburtsort: . . . . .Geburtstag: . . . .

Studiengang: . . . . .Semesterzahl: . . . .

1	2	3	4	5	6	Σ
4	4	4	4	8	4	24+4*

- **Geben Sie bei allen Antworten eine Begründung bzw. einen Beweis an.**
- Fur die Bearbeitung der Aufgaben stehen Ihnen **120** Minuten zur Verfügung.
- Bitte benutzen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Matrikelnummer auf jedes Lösungsblatt.

Aufgabe 1 (*Das Maximumsprinzip*) (4 Punkte)

In den beiden Teilaufgaben sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, sowie $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

a) u löse

$$\begin{cases} -\Delta u &= 1, \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0, \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für alle $x_0 \in \Omega$ die folgende Abschätzung gilt:

$$u(x_0) \geq \frac{1}{2n} \inf_{x \in \partial\Omega} |x - x_0|^2$$

b) u genüge

$$\begin{cases} \Delta u &= u^3 - u, \quad \text{in } \Omega, \\ |u(x)| &\leq 1, \quad \text{für alle } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $|u| \leq 1$ in $\overline{\Omega}$ gilt.

Aufgabe 2 (*Harmonische und subharmonische Funktionen)* (4 Punkte)

a) Geben Sie alle Definitionen von harmonischen Funktionen, die in der Vorlesung eingeführt wurden, an.

b) Seien $n \geq 2$, $N \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u_1, \ldots, u_N \in C^0(\Omega)$ C^0-subharmonisch. Zeigen Sie, dass auch $u : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert als
$$u(x) := \max\{u_1(x), \ldots, u_N(x)\}$$
in Ω C^0-subharmonisch ist.

Aufgabe 3 (*Wärmeleitungsgleichung)* (4 Punkte)

Sei u eine glatte Lösung des Problems
$$u_t - \Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty). \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass für $\lambda \neq 0$
$$u_\lambda(x,t) := u(\lambda x, \lambda^2 t)$$
ebenfalls eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung (1) ist.

b) Folgern Sie aus a), dass
$$v(x,t) := x \cdot \nabla_1 u(x,t) + 2t u_t(x,t)$$
eine weitere Lösung der Wärmeleitungsgleichung (1) ist. Hierbei bezeichnet $\cdot$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

c) Man zeige, dass die "Kelvin-Transformation"
$$w(x,t) := t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} u\left(\frac{x}{t}, -\frac{1}{t}\right)$$
ebenfalls eine Lösung von (1) ist.

Aufgabe 4 (*Wärmeleitungsgleichung in einem Intervall)* (4 Punkte)

Betrachten Sie das folgende Problem:
$$\left\{\begin{array}{rcll} u_t & = & \Delta u, & \text{in } (0,\pi) \times (0,\infty), \\ u(x,0) & = & \varphi(x), & \text{für } x \in [0,\pi], \\ u(0,t) & = & u(\pi,t) = 0, & \text{für } t \in (0,\infty). \end{array}\right. \tag{2}$$

a) Finden Sie die Kompatibilitätsbedingung an φ die notwendig (hinreichend wird erst in Teil b) behandelt) für die Existenz einer Lösung $u \in C^0([0,\pi] \times [0,\infty)) \cap C^\infty([0,\pi] \times (0,\infty))$ sind.

b) Nehmen Sie nun die Kompatibilitätsbedingung aus Teil a) an und zeigen Sie die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $u \in C^0([0,\pi] \times [0,\infty)) \cap C^\infty([0,\pi] \times (0,\infty))$ für das Problem (2).

Aufgabe 5 (*Die Wellengleichung*) (8 Punkte)
Gegeben seien die Funktionen $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ und $\psi \in C^1(\mathbb{R})$. Gesucht ist die Lösung $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ des Cauchyproblems für die Wellengleichung:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} &= 0, & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= \varphi(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= \psi(x), & \text{für } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

a) Leiten Sie die Lösung (die d'Alembertsch Formel) her.

Wir nehmen nun zusätzlich $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R})$ und $\psi \in C_0^1(\mathbb{R})$ an. Es seien

$$k(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_t(x,t)^2 dx \quad \text{bzw.} \quad p(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_x(x,t)^2 dx$$

die kinetische bzw. die potentielle Energie der Lösung u zur Zeit t.

b) Zeigen Sie, dass die Gesamtenergie konstant ist. Das heißt, dass die Abbildung $t \mapsto k(t) + p(t)$ konstant ist.

c) Für hinreichend große positive Zeiten gilt Gleichheit zwischen potentieller und kinetischer Energie. Konkret:

Es gibt $T_0 = T_0(\varphi, \psi) > 0$, sodass $p(t) = k(t)$ für alle $t \geq T_0$ gilt.

Aufgabe 6 (*Die Trennungsmethode*) (4 Punkte)
Es seien $L > 0$, $k > 0$ und $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ regulär. Nutzen Sie die Trennungsmethode, um das folgende Problem zu lösen:

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} + u &= 0 & \text{für } x \in (0,L), t \in (0,\infty), \\ u(x,0) &= f(x), & \text{für } x \in [0,L], \\ u(0,t) &= 0, & \text{für } t > 0, \\ -u_t(L,t) &= u(L,t), & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

Gehen Sie hierfr wie folgt vor: Setzen Sie zunächst $u(x,t) = v(x)w(t)$ an. Finden Sie nun die Gleichungen und die Randbedingungen für v und w.

Viel Erfolg!