Übungsaufgaben zur Vorlesung
Einführung in PDE — WS 2020/2021, Serie 6
Prof. Dr. G. Wang — 7.12.2020
MSc. J. Metsch

Aufgabe 1 (Energie-Methode, Eindeutigkeit) (4 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes C^1-Gebiet und $u \in C^{2,1}(\Omega \times (0,T)) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega} \times [0,T])$ eine Lösung von

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \text{ in } \Omega \times (0,T) \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \times (0,T). \end{aligned}$$

Wir definieren nun

$$F(t) := \int_\Omega u(x,t)^2 dx.$$

Zeigen Sie, dass F in $(0,T)$ differenzierbar ist und $F'(t) \leq 0$ für alle $t \in (0,T)$ ist. Folgern Sie, dass $u = 0$ in $\overline{\Omega}_T$, falls u zusätzlich

$$u = 0 \text{ in } \Omega \times \{0\}$$

erfüllt.

Aufgabe 2 (*Transformation*) (2 Punkte)
Sei $w : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto w(x,t)$ eine Lösung von

$$w_t = \alpha w_{xx} + \beta w_x + \gamma w, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}.$$

Die Parameter α, β und γ sind hierbei feste reelle Zahlen und $\alpha > 0$. Für $\lambda, a \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$u_{\lambda a}(t,x) := e^{\lambda t/\alpha} e^{-ax} w\left(x, \frac{t}{\alpha}\right).$$

Finden Sie eine Wahl für λ und a in Abhängigkeit von α, β und γ, sodass $u_{\lambda a}$ die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx}$$

in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ erfüllt.

Aufgabe 3 (*Eindeutigkeit*) (2 + 4 Punkte)

(a) Es sei $I = [a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\alpha, \beta \in C^0(I, \mathbb{R})$ und $w \in C^1(I^o, \mathbb{R}) \cap C^0(I, \mathbb{R})$ (hierbei $I^o = (a, b)$) eine Funktion, die die Ungleichung

$$w'(t) \leq \beta(t)w(t) + \alpha(t) \quad \forall t \in I^o$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass für alle $t \in I$ die Ungleichung

$$w(t) \leq w(a)e^{\int_a^t \beta(s)ds} + \int_a^t \alpha(r)e^{\int_r^t \beta(s)ds}dr$$

gilt. Insbesondere folgt also $w(t) \leq 0$ für $t \in I$, falls $\alpha = 0$ und $w(a) = 0$.

(b) Sei B die offene Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ und $f \in C^0([0, \infty))$. Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(t)(u - \frac{|x|^2}{2n}) - 1, & \text{in } B \times [0, \infty), \\ u(x, t) = \frac{1}{2n}, & \forall x \in \partial B \text{ und } t \geq 0 \\ u(x, 0) = \frac{1}{2n}, & \forall x \in B \end{cases}$$

und suchen nach Lösungen $u \in C^2(B \times (0, \infty)) \cap C^0(\overline{B \times (0, \infty)})$.

(i) Zeigen Sie, dass das Problem höchstens eine Lösung hat.

(ii) Zeigen Sie, dass falls das Problem eine Lösung hat, sie nicht negativ ist und die Abschätzung

$$0 \leq u(x, t) \leq \frac{1}{2n} \exp\left\{\int_0^t f(s)ds\right\} + \frac{|x|^2}{2n} \tag{1}$$

erfüllt. Weiter gilt $u(x, t) \leq 1/n$, falls $f \leq 0$.

Hinweis. Benutzen Sie Aufgabe 3(a) zweimal. Für die Eindeutigkeit betrachten Sie $w(t) = \int_B v^2(x, t)dx$, wobei $v = u_1 - u_2$ die Differenz zweier Lösungen ist. Um die Abschätzung (1) zu erhalten, ist es hilfreich $u - \frac{|x|^2}{2n}$ zu betrachten.

Aufgabe 4 (*Spiegelung*) (4 Punkte)

Lösen Sie das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ u_x(0, t) = 0, & \forall t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi \in C_b^1(\overline{\mathbb{R}^+}), & \text{mit } \varphi_x(0) = 0. \end{cases}$$

Spiegeln Sie hierfür das Problem zunächst um ein Problem auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ (erstes Argument x und zweites t) zu erhalten.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.

Abgabe ist am Montag, 14.12, 12:15 Uhr