Aufgabe 1 *(Beispiele von Differentialgleichungen)*
Schreiben Sie die Differentialgleichungen in der Form $F(x, u, Du, \ldots, D^k u) = 0$ und entscheiden Sie ob linear, semi-linear, quasilinear oder voll nichtlinear.

(a) $d\eta = 0$ für η 1-Form auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

(b) $\det(D^2 u) = 0$ für $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

(c) $f_z = f^2$ für $f : \Omega \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, wobei $\Omega \subset \mathbb{C}$.

(d) $u_t + (F \circ u)_x = 0$ für $u : \mathbb{R} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^m$, $u = u(x, t)$.

Aufgabe 2 *(Kapillarflächen)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet mit C^1-Rand. Betrachte für $u \in C^2(\overline{\Omega})$ und κ, $\sigma \in \mathbb{R}$ das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2} + \frac{\kappa}{2} \int_\Omega u^2 + \sigma \int_{\partial\Omega} u \, d\mu.$$

Es gelte $\delta\mathcal{F}(u, \varphi) = 0$ für all $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$. Berechnen Sie die resultierenden Gleichungen in Ω sowie auf $\partial\Omega$, und interpretieren Sie die Randbedingung geometrisch.

Aufgabe 3 *(p-harmonische Funktionen)*
Berechnen Sie die erste Variation sowie wenn möglich die Euler-Lagrange Gleichung der sogenannten p-Energie

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |Du|^p \quad \text{mit } 1 < p < \infty.$$

Aufgabe 4 *(Minimiumproblem ohne Lösung)*
Zeigen Sie, dass das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 \Big(\big(u'(x)^2 - 1\big)^2 + u(x)^2 \Big) \, dx$$

sein Infimum auf $C^1((0,1))$ nicht annimmt.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 27.4.2009 bis 9:15.