
Aufgabe 1 *(Differentialoperatoren in Hölderräumen)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit Sehnen-Bogen-Bedingung. Für Koeffizienten $a_{ij}, b_i, q \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ betrachten wir den Operator

$$L : C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}),\ Lu = a_{ij}\partial^2_{ij}u + b_i\partial_i u + qu.$$

Zeigen Sie, dass L eine stetige, lineare Abbildung ist.

Aufgabe 2 *(Der Kern eines elliptischen Operators)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offenes und beschränktes Gebiet der Klasse $C^{2,\alpha}$ mit $0 < \alpha < 1$. Wir betrachten den Operator

$$L : C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}),\ Lu = a_{ij}\partial^2_{ij}u + b_i\partial_i u + qu.$$

Dabei sei $a_{ij}, b_i, q \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ und L sei elliptisch mit Konstante $\lambda > 0$. Zeigen Sie: $\ker L$ ist mit der C^0-Norm ein Banachraum, mit kompakter Einheitskugel

$$K = \{u \in \ker L : \|u\|_{C^0(\Omega)} \leq 1\}.$$

Bemerkung: In der Funktionalanalysis wird gefolgert: $\dim \ker L < \infty$.

Aufgabe 3 *(Das Bild eines elliptischen Operators)*
Sei $L : C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ der Operator aus Aufgabe 2. Zeigen Sie indirekt: ist $X \subset C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ ein abgeschlossener Unterraum mit $\ker L \cap X = \{0\}$, so gibt es eine Konstante $C < \infty$ mit

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C\, \|Lu\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \text{ für alle } u \in X,$$

und $L(X)$ ist abgeschlossener Unterraum von $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Bemerkung. In der Funktionalanalysis wird mit dem Satz von Hahn-Banach gezeigt, dass $\ker L$ ein abgeschlossenes Komplement X besitzt. Daraus folgt dann: Bild L ist abgeschlossener Unterraum von $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Aufgabe 4 *(Zum Absorptionslemma)*
Sei $B^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1,\ x_n > 0\}$. Überlegen Sie, dass Lemma 5.6 auch für folgendes Mengensystem gilt, wobei wir $B^+_\rho(x) = B_\rho(x) \cap B^+$ setzen:

$$\mathcal{B} = \{B^+_\rho(x) : B_\rho(x) \subset B,\ x_n \geq 0\}.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 6.7.2009 bis 9:15.