
Aufgabe 1 *(Höhere Regularität)*
Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in (0,1)$. Betrachten Sie auf $B_1 = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ eine Lösung $u \in C^{k+2,\alpha}(B_1)$ der Gleichung $Lu = f$, wobei $Lu = a_{ij}\partial^2_{ij}u + b_i\partial_i u + qu$ elliptisch mit $a_{ij}, b_i, q \in C^{k,\alpha}(B_1)$. Zeigen Sie die innere Abschätzung

$$\|u\|_{C^{k+2,\alpha}(B_{\frac{1}{2}})} \leq C\,(\|f\|_{C^{k,\alpha}(B_1)} + \|u\|_{C^0(B_1)}).$$

Hinweis: Berechnen Sie eine Gleichung für $\partial_i u$ und verwenden Sie Induktion.

Aufgabe 2 *(Nichtlineares Maximumprinzip)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Wir betrachten einen allgemeinen nichtlinearen Operator $F[u](x) = f(x, u(x), Du(x), D^2u(x))$, wobei $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times n})$, $f = f(x,z,p,q)$. Es gelte

$$\frac{\partial f}{\partial q_{ij}}(x,z,p,q)\xi_i\xi_j \;>\; 0 \quad \text{für } \xi \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,z,p,q) \;\leq\; 0. \tag{2}$$

Seien $u, v \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ mit $F[v] \leq F[u]$ in Ω und $u \leq v$ auf $\partial\Omega$. Zeigen Sie:

$$u \leq v \quad \text{auf ganz } \Omega.$$

Hinweis. Schreiben Sie die Differenz der Ungleichungen als Integral auf $[0,1]$.

Aufgabe 3 *(Elliptische $C^{1,\alpha}$-Abschätzung)*
Seien $u \in (C^{1,\alpha} \cap C^2)(\mathbb{R}^n)$, $f \in (C^{0,\alpha} \cap C^1)(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $g \in (C^0 \cap L^p)(\mathbb{R}^n)$, wobei $0 < \alpha < 1$ und $1 - n/p = \alpha$, Lösung der Gleichung

$$\Delta u = \operatorname{div} f + g \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

Beweisen Sie mit einer Konstanten $C = C(n,\alpha)$ auf $\mathbb{R}^n$ die Abschätzung

$$[Du]_\alpha \leq C([f]_\alpha + \|g\|_{L^p}).$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 13.7.2009 bis 9:15. Dies ist der letzte Übungszettel.