Partielle Differentialgleichungen — Sommersemester 2009, Serie 2
Prof. Dr. E. Kuwert — 27 April 2009

Aufgabe 1 *(Euler-Lagrange-Gleichung für einen quadratischen Integranden)*
Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega a_{ik}^{\alpha\beta}(x) D_\alpha u^i D_\beta u^k + 2 b_{ik}^\beta u^i D_\beta u^k + c_{ik} u^i u^k.$$

Aufgabe 2 *(Harmonische Abbildungen in die Sphäre)*
Sei $\mathcal{C} = \{v \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(\Omega, \mathbb{R}^n) : |v| = 1\}$, und $u \in \mathcal{C}$ mit

$$\mathcal{F}(u) := \int_\Omega |Du|^2 = \inf\{\mathcal{F}(v) : v \in \mathcal{C},\ u = v \text{ auf } \partial\Omega\}.$$

Folgern Sie die Differentialgleichung $-\Delta u = |Du|^2 u$.

Aufgabe 3 *(konvexe Funktionale)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet mit C^1-Rand, $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ konvex und $g \in C^0(\overline{\Omega})$. Betrachten Sie auf $\mathcal{C} = \{u \in C^1(\overline{\Omega}) : u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$ das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega (\phi(Du) + gu).$$

Zeigen Sie: u ist genau dann Minimierer von $\mathcal{F}$ in $\mathcal{C}$, wenn gilt:

$$-\operatorname{div}\left[(D_p\phi)(Du)\right] = g.$$

Aufgabe 4 *(Lipschitzabhängigkeit)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzstetig. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x'(t) = f(x(t), t) \text{ für } t \in I,\ x(0) = x_0 \in \Omega.$$

Formulieren und beweisen Sie:
die Lösung hängt Lipschitzstetig von den Anfangsdaten ab.

(*Tipp:* Sei L die Lipschitz-Konstante von f, $x(t), y(t)$ Lösungen, und $\Psi(t) := e^{-2Lt}|x(t) - y(t)|^2$. Berechnen Sie $\Psi'(t)$...)

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 4.5.2009 bis 9:15.