
Aufgabe 1 *(C^2-Lösungen der Wellengleichung)*
Bestimmen Sie Lösungen $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ der Wellengleichung, die nicht von der Klasse C^3 sind: verwenden Sie für $f \in C^2(\mathbb{R})$ den Ansatz

$$u(x,t) = f(\omega t \pm \langle k, x \rangle) \quad \text{wobei } \omega \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 2 *(schwaches Maximumprinzip)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, und $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ mit $\Delta u \geq 0$. Zeigen Sie (unabhängig von Satz 2.2 der Vorlesung)

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Anleitung: schließen Sie erst unter der Annahme $\Delta u > 0$ aus, dass das Maximum im Inneren angenommen wird. Betrachten Sie dann $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon |x|^2$.

Aufgabe 3 *(harmonische Funktionen sind reell-analytisch)*
Sei $u \in C^\infty(\Omega)$ harmonisch. Zeigen Sie mithilfe der Abschätzungen von Cauchy, dass die Taylorreihe von u mit Entwicklungspunkt $x_0 \in \Omega$ auf einem Ball $B_R(x_0)$ konvergiert.

Aufgabe 4 *(Harnackungleichung)*
Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Ist $u \in C^2(B_{4R}(x_0))$ harmonisch und nichtnegativ, so gilt

$$\sup_{B_R(x_0)} u \leq 3^n \inf_{B_R(x_0)} u.$$

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch und nichtnegativ. Dann gilt für jedes Gebiet $G \subset\subset \Omega$ eine Abschätzung

$$\sup_G u \leq C \inf_G u \quad \text{mit } C = C(\Omega, G) < \infty.$$

(b) folgt aus (a) mit einem Überdeckungsargument.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 11.5.2009 bis 9:15.