
Aufgabe 1 *(Eigenwerte des Laplaceoperators)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Betrachten Sie für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ das Randwertproblem

$$\Delta u = \lambda u \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Zeigen Sie: für $\lambda \geq 0$ ist $u \equiv 0$ die einzige Lösung, während es für $\lambda < 0$ nichttriviale Lösungen geben kann, jedenfalls im Fall $n = 1$.

Aufgabe 2 *(homogene harmonische Funktionen)*
Sei $v \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ eine Lösung der Gleichung $-\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} v = \lambda v$. Zeigen Sie, dass die in Polarkoordinaten $r > 0$, $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ gegebenen Funktionen

$$u(r,\omega) = r^\alpha v(\omega) \quad \text{mit } \alpha = \frac{n-2}{2} \pm \sqrt{\frac{(n-2)^2}{4} + \lambda}$$

auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ harmonisch sind. Sie können den Laplaceoperator auf $\mathbb{S}^{n-1}$ mittels einer lokalen Parametrisierung $\varphi : U \to \mathbb{S}^{n-1}$ definieren durch

$$\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}} v = \frac{1}{\sqrt{\det\gamma}} \sum_{i,j=1}^{n-1} \partial_i \Big(\sqrt{\det\gamma}\, \gamma ij\, \partial_j (v \circ \varphi) \Big) \text{ wobei } \gamma_{ij} = \langle \partial_i\varphi, \partial_j\varphi \rangle.$$

Aufgabe 3 *(Spiegelungsprinzip von Schwarz)*
Sei $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ und

$$B^\pm = \{x \in B : x_n > 0 \text{ (bzw. } x_n < 0)\} \quad \text{und} \quad D = \{x \in B : x_n = 0\}.$$

Es sei $u \in C^0(B^+ \cup D) \cap C^2(B^+)$ harmonisch auf B^+ und $u|_D = 0$. Zeigen Sie: die Fortsetzung durch ungerade Spiegelung

$$u(x) = \begin{cases} u(x_1, \ldots, x_n) & \text{für } x_n \geq 0, \\ -u(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n) & \text{für } x_n < 0 \end{cases}$$

ist glatt und harmonisch auf ganz B.

Aufgabe 4 *(Dirichletproblem auf dem Halbraum)*
Sei $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$. Bestimmen Sie zu $x = (\xi, x_n) \in H$ eine Greensche Funktion, also eine Lösung $G_x \in C^\infty(H\backslash\{x\})$ des Randwertproblems

$$\Delta G_x = \delta_x \text{ in } H \quad \text{und} \quad G_x = 0 \text{ auf } \partial H.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 18.5.2009 bis 9:15.