

Aufgabe 1 (*Energieabschätzung*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1 -Rand, Betrachten Sie auf $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ eine Lösung $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega_T})$ des Anfangs-Randwert-Problems

$$\begin{aligned}\partial_t u - \Delta u &= f && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u(\cdot, 0) &= u_0 && \text{auf } \Omega, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times [0, T].\end{aligned}$$

Zeigen Sie mit einer Konstanten $C = C(T)$ die Abschätzung

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dt \leq C \left(\int_{\Omega} |u_0|^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega} |f(x, t)|^2 dx dt \right).$$

Aufgabe 2 (*Parabolische Halbgruppe*)

Sei $C_b^0(\mathbb{R}^n)$ der Raum der stetigen, beschränkten Funktionen, versehen mit der Supremumsnorm. Betrachten Sie für $t > 0$ den Operator

$$P_t : C_b^0(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^n), (P_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \theta(x - y, t) f(y) dy.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

- (1) $\|P_t\| \leq 1$ für alle $t > 0$ (Operatornorm).
- (2) $P_t f \rightarrow f$ mit $t \searrow 0$ (bzgl. der Supremumsnorm).
- (3) $P_{t_1+t_2} = P(t_2) \circ P(t_1)$.

Aufgabe 3 (*Skalierung der Wärmeleitungsgleichung*)

Sei $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Zeigen Sie der Reihe nach, dass auch folgende Funktionen Lösungen sind:

- (1) $u_\lambda(x, t) = u(\lambda x, \lambda^2 t)$ für $\lambda > 0$,
- (2) $v(x, t) = \langle x, \nabla u(x, t) \rangle + 2t \partial_t u(x, t)$.

Aufgabe 4 (*Lösung der Wärmeleitungsgleichung durch Fourierreihe*)

Sei $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ 2π -periodisch. Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\partial_t u - \partial_{xx}^2 u = 0 \quad u(\cdot, 0) = u_0.$$

Bestimmen Sie eine Lösung u als Fourierreihe mit zeitabhängigen Koeffizienten.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 8.6.2009 bis 9:15.