Aufgabe 1 *Transportgleichung)*
Bestimmen Sie eine Lösung $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ des Anfangswertproblems für die Transportgleichung

$$\partial_t u - \langle \nabla u, v\rangle = f \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \quad u(\cdot,0) = u_0 \text{ auf } \mathbb{R}^n.$$

Dabei seien $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$ und $f \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, sowie $v \in \mathbb{R}^n$ fest.

Aufgabe 2 *(Equipartition der Energie)*
Sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung mit Anfangsdaten $u(\cdot,0) = u_0 \in C^2_c(\mathbb{R}^n)$, $\partial_t u(\cdot,0) = v_0 \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$. Die kinetische und potentielle Energie der Welle sind definiert durch

$$T(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |\partial_t u(x,t)|^2\,dx \quad \text{und} \quad V(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(x,t)|^2\,dx.$$

Zeigen Sie, dass die Gesamtenergie $E(t) = T(t) + V(t)$ konstant ist, und dass $T(t) = V(t)$ für $t > 0$ hinreichend groß.

Aufgabe 3 *(Erhaltungsgrößen der KdV-Gleichung[1])*
Betrachten Sie eine Lösung $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ der KdV-Gleichung

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + 6\,u\,\partial_x u = 0.$$

Zeigen Sie, das folgende Größen zeitlich konstant sind:

$$m(t) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,dx, \quad p(t) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)^2\,dx \quad \text{und} \quad E(t) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{2}(\partial_x u)^2 - u^3\Big)\,dx.$$

Hinweis. Damit die Aussage gilt, müssen die Funktion u und ihre Ableitungen für $x \to \pm\infty$ verschwinden. Versuchen Sie hinreichende Bedingungen zu formulieren.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 15.6.2009 bis 9:15.

[1] D. Korteweg und Gustav de Vries