

Aufgabe 1 (*Spezielle Lösungen der Wellengleichung*)

Berechnen Sie die Lorentz-invarianten Lösungen der Wellengleichung, also die Lösungen der Form $u(x, t) = \varphi(t^2 - |x|^2)$ mit einer reellen Funktion φ , und bestimmen Sie die Definitionsbereiche dieser Lösungen.

Aufgabe 2 (*Energieintegralmethode I*)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet der Klasse C^1 . Beweisen Sie die Eindeutigkeit von Lösungen $u \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, T])$ der Anfangs-Randwert-Probleme

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u - \Delta u &= f && \text{in } \Omega \times (0, T) \\ (u, \partial_t u)(\cdot, 0) &= (u_0, v_0) && \text{auf } \Omega, \\ u &= g && \text{auf } \partial\Omega \times [0, T].\end{aligned}$$

Beantworten Sie die Frage auch im Fall der Neumann-Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{auf } \partial\Omega \times [0, T].$$

Aufgabe 3 (*Energieintegralmethode II*)

Sei $q \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Betrachten Sie auf dem Kegel

$$K(x_0, t_0) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) : |x - x_0| < t_0 - t\}$$

eine Lösung $u \in C^1(\overline{K(x_0, t_0)}) \cap C^2(K(x_0, t_0))$ der modifizierten Wellengleichung

$$Lu = \partial_t^2 u + q \partial_t u - \Delta u = 0.$$

Beweisen Sie: ist $u(\cdot, 0) = \partial_t u(\cdot, 0) = 0$ auf $B_{t_0}(x_0)$, so ist u identisch Null.

Hinweis. Im Fall $q \geq 0$ ist der Beweis etwas einfacher.

Aufgabe 4 (*Gronwall-Ungleichung*)

Sei $u \in L^\infty(I)$, $I = (0, T)$. Für $a \in L^1(I)$, $a \geq 0$, und $B \in L^\infty(I)$ gelte

$$u(t) \leq B(t) + \int_0^t a(s)u(s) ds \quad \text{für fast alle } t \in I.$$

Dann folgt

$$u(t) \leq \|B\|_{L^\infty((0,t))} \exp\left(\int_0^t a(s) ds\right).$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 22.6.2009 bis 9:15.