**Aufgabe 1** *(Gegenbeispiel zur $C^2$-Regularität)*
Sei $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n, n > 1$. Es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $u_\varepsilon \in C_c^\infty(B_1(0))$ mit

$$1 = \|\Delta u_\varepsilon\|_{C^0} \leq \varepsilon \|D^2 u_\varepsilon\|_{C^0} \quad \text{und} \quad \|u_\varepsilon\|_{C^0} \leq \frac{1}{2n}.$$

Zeigen Sie dies in folgenden Schritten:

(1) Die $C^0$-Schranke folgt aus $|\Delta u_\varepsilon| \leq 1$ mit dem Maximumprinzip.

(2) Skalierung: es reicht $v_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ zu finden mit

$$0 < \|\Delta v_\varepsilon\|_{C^0} \leq \varepsilon \, \|D^2 v_\varepsilon\|_{C^0}.$$

(3) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$v_\varepsilon(x) = \eta_\varepsilon(x) \, \langle Ax, x \rangle \quad \text{für } A \neq 0 \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ mit } \operatorname{tr}(A) = 0$$

die Eigenschaften in (2) hat, falls $\eta_\varepsilon(0) = 1$, $D\eta_\varepsilon(0) = 0$, $D^2\eta_\varepsilon(0) = 0$ und

$$|x| \, |D\eta_\varepsilon(x)| + |x|^2 \, |D^2 \eta_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon.$$

(4) Bestimmen Sie nun $\eta_\varepsilon$, zum Beispiel $\eta_\varepsilon(r) = g(\varepsilon \log \frac{1}{r})$ für $g$ geeignet.

**Aufgabe 2** *(parabolische Höldernormen)*
Die parabolische Metrik auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$d(p_1, p_2) = \max\{|x_1 - x_2|, |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}}\} \text{ wobei } p_i = (x_i, t_i).$$

Sei $C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\overline{\Omega_T})$ definiert durch $\|u\|_{C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\Omega_T)} = \|u\|_{C^0(\Omega_T)} + [u]_{\alpha,\Omega_T} < \infty$ wobei

$$[u]_{\alpha,\Omega_T} = \sup_{p,q \in \Omega_T, p \neq q} \frac{|u(p) - u(q)|}{d(p,q)^\alpha} \quad \text{für } 0 < \alpha \leq 1.$$

Zeigen Sie dass $C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\overline{\Omega_T})$ ein Banachraum ist.

**Aufgabe 3** *(parabolisches Taylorpolynom)*
Sei $U_\rho(0) = \{p \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : d(p, 0) < \rho\}$ bezüglich der parabolischen Metrik aus Aufgabe 2. Das parabolische Taylorpolynom von $u$ im Punkt $p_0 = 0$ ist

$$P_0(u)(x,t) = u(0) + \nabla u(0) \, x + \frac{1}{2} \nabla^2 u(0)(x,x) + \partial_t u(0) t,$$

wobei $D = (\nabla, \partial_t)$. Zeigen Sie für $p = (x,t) \in U_\rho(0)$ die Abschätzung

$$|u(p) - P_0(u)(p)| \leq [D^{2,1} u]_{\alpha, U_\rho(0)} \, d(p,0)^{2+\alpha}.$$

*Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 29.6.2009 bis 9:15.*