Aufgabe 1 *(offene Kugeln)* (4 Punkte)
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass die Kugel

$$B_r(x) = \{y \in X : d(y, x) < r\} \quad \text{mit } x \in X,\, r > 0,$$

eine offene Teilmenge ist.

Aufgabe 2 *(kofinite Topologie)* (4 Punkte)
Sei X eine Menge, und $\mathcal{T}$ das System aller Mengen $U \subset X$, für die $X \backslash U$ endlich ist oder $U = \emptyset$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie ist.

Aufgabe 3 *(Inneres und Abschluss)* (4 Punkte)
Sei X ein topologischer Raum. Für $M \subset X$ bezeichnet $\operatorname{int} M$ das Innere und $\overline{M}$ den Abschluss von M. Zeigen Sie:

a) Durch höchstens dreimalige Iteration von *Inneres* und *Abschluss*, zum Beispiel $\operatorname{int}(\overline{\operatorname{int} M})$, ergeben sich nicht mehr als sieben verschiedene Mengen.

b) Ist die Zahl sieben optimal? Finden Sie ein Beispiel.

Aufgabe 4 *(diskrete Topologie)* (4 Punkte)
Die Topologie $\mathcal{T} = 2^X$ heißt diskrete Topologie auf X. Geben Sie eine Metrik auf X an, so dass $\mathcal{T}$ die durch die Metrik induzierte Topologie ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 30.4. vor der Vorlesung.