
Aufgabe 1 *(Überlagerungen)* (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass
$p_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $p_1(z) = \exp(z)$
$p_2 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ mit $p_2(z) = z^n$
$p_3 : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n$ mit $p_3(z) = \{\text{Gerade durch Null und } z\}$
Überlagerungen sind.

Aufgabe 2 *(Abbildungen nach $\mathbb{S}^1$)* (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass jede stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^1$ nullhomotop ist, falls $n \geq 2$. Überlegen Sie, dass die Aussage auch gilt für $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ statt $\mathbb{S}^n$.

Aufgabe 3 *($\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$ nicht abelsch)* (4 Punkte)
Betrachten Sie die Abbildung $p : Y \to X$, $p(s,t) = (e^{is}, e^{it})$, wobei

$$Y = \mathbb{R} \times 2\pi\mathbb{Z} \cup 2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \quad \text{und} \quad X = \mathbb{S}^1 \times \{1\} \cup \{1\} \times \mathbb{S}^1.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(1) p ist eine Überlagerung.

(2) Y ist retrahierbar auf $Y_0 = \{(s,t) \in Y : 0 \leq s, t \leq 2\pi\}$.

(3) $\pi_1(Y_0, (0,0)) \cong \mathbb{Z}$.

(4) Unter p_* geht ein Erzeuger von $\pi_1(Y_0, (0,0))$ auf einen von Null verschiedenen Kommutator in $\pi_1(X, (1,1))$.

Aufgabe 4 *(Möbiusband)*
Betrachte auf $\mathbb{R} \times [0,1]$ die kleinste Äquivalenzrelation mit $(s,t) \approx (s + 2\pi, 1-t)$. Berechnen Sie die Fundamentalgruppe des Quotientenraums (Möbiusband), und berechnen Sie alle seine Überlagerungen.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 16.7. vor der Vorlesung.