Topologie **SS 2012**

Prof. Dr. E. Kuwert 20. July 2012

Aufgabe 1

Sei (X, d) ein metrischer Raum, und $\mathcal{A}$ das System aller abgeschlossenen, beschränkten Teilmengen $A \neq \emptyset$ von X. Wir setzen

$$B_\varrho(A) = \{x \in X : \text{ es gibt ein } a \in A \text{ mit } d(x, a) < \varrho\}.$$

Der Hausdorffabstand von $A, B \in \mathcal{A}$ ist dann definiert durch

$$d_H(A, B) = \inf\{\varrho > 0 : A \subset B_\varrho(B),\, B \subset B_\varrho(A)\}.$$

Zeigen Sie, dass d_H eine Metrik auf $\mathcal{A}$ ist.

Aufgabe 2

Der Graph einer Abbildung $f : X \to Y$ ist $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(1) f ist stetig

(2) $p : G_f \to X$ ist Homöomorphismus, wobei $p : X \times Y \to X$ die Projektion ist.

Aufgabe 3

Sei X ein Hausdorffraum. Zeigen Sie, dass endliche Mengen in X abgeschlossen sind.

Aufgabe 4

Sei X ein topologischer Raum. Beweisen Sie, dass X und $X \times [0, 1]$ homotopieäquivalent sind.

Aufgabe 5

Beweisen Sie, dass eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ auf einem quasi-kompakten topologischen Raum X ihr Infmimum annimmt.

Aufgabe 6

Welche der folgenden Aussagen ist wahr, welche falsch?

(a) $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ sind homotopieäquivalent.

(b) $\mathbb{R}^2$ ist homöomorph zu einer abgeschlossenen Teilmenge des $\mathbb{R}^3$.

(c) $\mathbb{R}^2$ ist homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^3$.

(d) $[0,\infty) \times [0,\infty)$ ist homöomorph zu $[0,\infty) \times \mathbb{R}$.

Aufgabe 7

Sei M die Menge aller (2×2)-Matrizen mit reellen Koeffizienten und betracten auf M die induzierte Topologie von $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Entscheiden Sie, ob die Teilmenge $S = \{A \in M : A^2 = E_2\}$ abgeschlossen ist, zusammenhängend ist, und ob S kompakt ist.

Aufgabe 8

Sei $X = (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ der topologischer Raum mit Basis $B = \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Betrachten Sie den Quotientenraum bzw die Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow [x] = [y]$, wobei $[x] = max\,\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$. Zum welchem des folgenden Räume ist $X/\sim$ homöomorph?

(a) $\mathbb{S}^1$

(b) $[0,1)$

(c) $\mathbb{Z}$

(d) $\mathbb{S}^1 \backslash \{(0,0)\}$

Aufgabe 9

Sei $X = \mathbb{S}^1 \times D$ wobei $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1\}$, und $\gamma = \mathbb{S}^1 \times \{0\}$. Sagen Sie welche von den folgenden Räume homotopieäquivalent sind.

(a) $A = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

(b) $B = X \backslash \gamma$

(c) $C = \mathbb{R}^3 \backslash \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0\}$.

Aufgabe 10

Seien $p_1 : Y_1 \to X_1$ und $p_2 : Y_2 \to X_2$ Überlagerungen. Zeigen Sie

(i) $A \subset X_1$ ein Unterraum und $B = p_1^{-1}(A) \subset Y_1$, dann ist $p_1|_B : B \to A$ eine Überlagerung.

(ii) die natürliche Abbildung $p_1 \times p_2 : Y_1 \times Y_2 \to X_1 \times X_2$ ist eine Überlagerung.