Aufgabe 1 *(Erzeugte Topologie)* (4 Punkte)
Sei X eine Menge und $\mathcal{B} \subset 2^X$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $V_1, V_2 \in \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad V_1 \cap V_2 \in \mathcal{B}$,

(2) $\bigcup_{V \in \mathcal{B}} V = X$.

Dann gibt es genau eine Topologie $\mathcal{T} \subset 2^X$, für die $\mathcal{B}$ eine Basis ist.

Aufgabe 2 *(Homöomorphismen)* (4 Punkte)
Geben Sie Homöomorphismen (mit Nachweis) an zwischen

(a) $\mathbb{R}$ und $(-1, 1)$.

(b) $Z = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ und $\mathbb{S}^2 \backslash \{(0, 0, \pm 1)\}$ (als Teilmengen des $\mathbb{R}^3$).

Aufgabe 3 *(Nichtäquivalente Normen)* (4 Punkte)
Betrachten Sie auf $X = C^1([0, 1])$ die Normen $\| \cdot \|_{C^0}$ und $\| \cdot \|_{C^1}$, und die induzierten Metriken sowie Topologien. Zeigen Sie, dass die Einheitskugel

$$B = \{f \in X : \|f\|_{C^1} < 1\}$$

bzgl. der durch $\| \cdot \|_{C^0}$ induzierten Topologie nicht offen ist.

Aufgabe 4 *(Lokale Stetigkeit)* (4 Punkte)
Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt stetig im Punkt $x \in X$, falls gilt:

> *Zu jeder offenen Menge $V \subset Y$ mit $f(x) \in V$ gibt es eine offene Menge $U \subset X$ mit $x \in U$ und $f(U) \subset V$.*

Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn f in allen $x \in X$ stetig ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 7.5. vor der Vorlesung.