
Aufgabe 1 *(Lebesgue-Zahl)* (4 Punkte)
Sei (X, d) ein kompaktischer metrischer Raum. Zeigen Sie, dass es zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X ein $\varrho > 0$ (die Lebesgue-Zahl) gibt, so dass gilt:

Zu jedem $x \in X$ gibt es ein $i \in I$ mit $B_\varrho(x) \subset U_i$.

Aufgabe 2 *(Beispiel zur Hausdorffeigenschaft)* (4 Punkte)
Betrachten Sie in $\mathbb{R}^2$ die Mengen

$$\begin{aligned} L_a &= \{(a, y) : y \in \mathbb{R}\} \quad \text{für } |a| \geq \frac{\pi}{2}, \\ G_b &= \{(x, b + \log\cos x) : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\} \quad \text{für } b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(1) Zeigen Sie, dass alle L_a, G_b abgeschlossen und paarweise disjunkt sind.

(2) Identifizieren Sie Punkte in $\mathbb{R}^2$, die in derselben Menge L_a oder G_b liegen. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2/\sim$ kein Hausdorffraum ist.

Aufgabe 3 *(Gleichmäßige Konvergenz)* (4 Punkte)
Sei X ein topologischer Raum, und die Folge $f_k : X \to \mathbb{R}$ konvergiere gleichmäßig gegen $f : X \to \mathbb{R}$, also

$$\sup_{x\in X} |f_k(x) - f(x)| \to 0 \quad \text{mit } k \to \infty.$$

Zeigen Sie: sind die f_k stetig, so auch f.

Aufgabe 4 *(Hausdorff vs. normal)* (4 Punkte)
Sei $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ mit der üblichen Topologie $\mathcal{T}_H$ als Teilraum von $\mathbb{R}^2$. Betrachte auf $H \cup \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ die Topologie $\mathcal{T}$, die durch $\mathcal{T}_H$ und durch Mengen der Form $(B_r((x, 0)) \cap H) \cup \{(x, 0)\}$ erzeugt wird. Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}$ Hausdorffsch ist, aber nicht normal.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 4.6. vor der Vorlesung.