Aufgabe 1 *(Kompaktheit eines Produkts)* (4 Punkte)
Seien X, Y quasikompakte, topologische Räume. Zeigen Sie ohne Verwendung des Satzes von Tychonov, dass der Produktraum $X \times Y$ quasikompakt ist.

Aufgabe 2 *(Hausdorffeigenschaft von Quotienten)* (4 Punkte)
Sei X ein topologischer Raum und $F \subset X$. Bezeichne mit X/F den Quotientenraum nach der kleinsten Äquivalenzrelation, die alle Punkte in F identifiziert (Kollabieren eines Unterraums). Zeigen Sie:

(a) Ist X kompakt und F abgeschlossen, dann ist X/F Hausdorffsch und kompakt.

(b) $\mathbb{S}^{n-1} \times [0,1]/(\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\})$ und $\overline{B}^n$ sind homöomorph.

Aufgabe 3 *(Zariski Topologie ist nicht Hausdorffsch)* (4 Punkte)
Sei $\Bbbk$ ein Körper und $\Bbbk\,[x_1, ..., x_n]$ die Menge aller Polynome in n Variablen. Betrachten Sie die Zariski Topologie $\mathcal{Z}$ auf $\Bbbk^n$. In dieser Topologie sind die abgeschlossenen Mengen nach Definition genau die Teilmengen der Form:

$$A(\mathcal{F}) = \{z = (z_1, ...z_n) \in \Bbbk^n : f(z) = 0 \text{ für alle } f \in \mathcal{F} \subset \Bbbk\,[x_1, ..., x_n]\}.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{C}^n, \mathcal{Z})$ nicht Hausdorffsch ist.

Aufgabe 4*(Zariski Topologie auf $\mathbb{R}$)* (4 Punkte)
Betrachten Sie $\mathbb{R}$ mit der Zariski Topologie. Zeigen Sie, dass:

(a) $(\mathbb{R}, \mathcal{Z})$ quasikompakt ist.

(b) $(\mathbb{R}, \mathcal{Z})$ zusammenhängend ist.

(c) die Teilmenge $(-2, 0) \cup (1, 5)$ zusammenhängend ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 11.6. vor der Vorlesung.