Aufgabe 1 *(Teilung der Eins)* (4 Punkte)
Konstruieren Sie eine Teilung der Eins auf $\mathbb{R}^n$ mit kompakten Trägern (mit Nachweis).

Aufgabe 2 *(zur Alexandroff-Kompaktifizierung)* (4 Punkte)
Seien $p(z)$, $q(z)$ teilerfremde komplexe Polynome. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{C}\backslash\{z : q(z) = 0\} \to \mathbb{C},\ f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

eine eindeutige stetige Fortsetzung $\hat{f} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ hat. Dabei ist $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Alexandroff-Kompaktifizierung. Für welche p und q ist $\hat{f}$ homeomorph?

Aufgabe 3 *(Untermannigfaltigkeiten)* (4 Punkte)
Welche der folgenden Mengen sind topologische Mannigfaltigkeiten?

(1) $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^3\}$,

(2) $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x(1 - x^2)\}$.

Aufgabe 4 *(Quotientenprojektion und Kompaktheit)* (4 Punkte)
Sei $\sim$ Äquivalenzrelation auf dem lokalkompakten topologischen Raum X, mit Äquivalenzklassen $[x]$. Für $M \subset X$ sei

$$[M] = \bigcup_{[x]\cap M \neq \emptyset} [x].$$

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) M kompakt impliziert $[M]$ kompakt.

(2) Jede Faser $[x]$ ist kompakt, und ist $V \subset X$ offen mit $[x] \subset V$, so gibt es U offen mit $[x] \subset U = [U] \subset V$.

(3) $X/\sim$ ist lokalkompakt und die Projektion $\pi : X \to X/\sim$ ist eigentlich.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 18.6. vor der Vorlesung.