Aufgabe 1 *(Verkleben mit f)* (4 Punkte)
Seien X, Y topologische Räume, $F \subset X$ und $f : F \to X$ stetig. Betrachten Sie auf der disjunkten Vereinigung $X \mathbin{\dot\cup} Y$ die kleinste Äquivalenzrelation, die jedes $x \in F$ mit $f(x) \in Y$ identifiziert, und bezeichnen Sie den Quotienten mit $X \cup_f Y$ (Verkleben mit f). Zeigen Sie:

(a) Ist X, Y zusammenhängend, so auch $X \cup_f Y$.

(b) Sind X, Y kompakt und F abgeschlossen in X, so ist $X \cup_f Y$ Hausdorffsch und kompakt.

Aufgabe 2 *(Struktur der 3-Sphäre)* (4 Punkte)
Stellen Sie $\mathbb{S}^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ als Vereinigung zweier Volltori $T_{1,2} \approx \overline{B}^2 \times \mathbb{S}^1$ dar, die längs ihres Randes verklebt sind.

Aufgabe 3 *(Eigenschaften der Cantormenge)* (4 Punkte)
Beweisen Sie die folgende Eigenschaften der Cantormenge C:

- Jedes $x \in C$ ist Häufungspunkt von C
- Die Menge $[0, 1] \setminus C$ ist dicht in $[0, 1]$
- Die Cantormenge C ist überabzählbar
- $C = \frac{1}{3}C \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C\right)$, C ist selbstähnlich.

Aufgabe 4 *(Beispiel von Mannigfaltigkeit)* (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass $SO(n)$ eine topologische Mannigfaltigkeit ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 25.6. vor der Vorlesung.