Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung — SS 2014, Serie 02
Prof. Dr. G. Wang — 6.5.2014
Dr. R. Alessandroni

Aufgabe 1 (*Erste und zeite Variationen*) (4 Punkte)

Man löse die Euler-Lagrange-Gleichungen in $C^2([0,1])$ für

a) $\mathcal{F}(u) = \int_0^1 ((u'(t))^2 + 2u(t))dt, \quad u(0) = u(1) = 1.$

b) $\mathcal{F}(u) = \int_0^2 ((u'(t))^2 + 2u(t)u'(t) + u(t)^2)dt, \quad u(0) = u(2) = 1.$

Man berechne die zweite Variation von $\mathcal{F}$ und diskutiere, ob die Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichungen lokale oder globale unter allen Funktionen in $C^1([0,1])$ sind, die die gleichen Randbedingungen erfüllen.

Aufgabe 2 (*Minimiumproblem ohne Lösung*) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 \left(\left(u'^2(x) - 1\right)^2 + u(x)^2 \right) dx$$

sein Infimum auf $C^1((0,1))$ nicht annimmt.

Aufgabe 3 (*Kapillarflächen*) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet mit C^1-Rand. Betrachte für $u \in C^2(\overline{\Omega})$ und κ, $\sigma \in \mathbb{R}$ das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2} + \frac{\kappa}{2} \int_\Omega u^2 + \sigma \int_{\partial\Omega} u \, d\mu.$$

Es gelte

$$\delta\mathcal{F}(u, \varphi) = 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in C^2(\overline{\Omega}).$$

Berechnen Sie die resultierenden Gleichungen in Ω sowie auf $\partial\Omega$, und interpretieren Sie die Randbedingung geometrisch.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben sei ein Variationsintegral der Form

$$\mathcal{F}(u) = \int_\alpha^\beta F(u(x), u'(x))dx.$$

Nehmen Sie an, die Lösung des Variationsproblems $\delta\mathcal{F}(u) = 0$ sei eine invertierbare C^2 Funktion; die Inverse von $y = u(x)$ sei mit $x = v(y)$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass das Variationsproblem äquivalent ist zu $\delta G(v) = 0$ mit

$$G(v) = \int_a^b G(y, v'(y))dy$$

und

$$G(y, v'(y)) = F\left(y, \frac{1}{v'(y)}\right) v'(y).$$

Wie sind a und b bestimmt?

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Dienstag, 13.5., vor der Vorlesung**.