Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung — SS 2014, Serie 03
Prof. Dr. G. Wang — 13.5.2014
Dr. R. Alessandroni

Aufgabe 1 (*Legendre-Hadamard Bedingung*) (4 Punkte)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $F_\alpha : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F_\alpha(x,z,p) = \alpha |p|^2 + \det(p)$$

mit $p = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, wobei $|p|^2 = \sum_{i,j=1}^2 p_{ij}^2$ ist.
a) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die F_α die Legendre-Hadamard Bedingung erfüllt.
b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist F_α konvex?

Aufgabe 2 (*keine schwache local Minimalstelle)* (4 Punkte)

Sei $\mathcal{F}(u) := \int_{-1}^1 (x^2 u'(x)^2 + x u'(x)^3) dx$. Es gilt

$$\delta\mathcal{F}(0,\xi) = 0, \forall \xi \in C_0^1([-1,1]), \quad \delta^2\mathcal{F}(0,\xi) > 0, \forall 0 \neq \xi \in C_0^1([-1,1]).$$

Aber $u = 0$ ist nicht schwache local Minimalstelle.

Aufgabe 3 (*EL-Geleichung*) (4 Punkte)

Sie betrachten $\mathcal{F}(u) := \int_a^b F(u(x), u'(x)) dx$, d.h., die Lagrange-Funktion F nicht von x abhängt.
a) Sie leiten die Euler-Lagrange-Gleichung von $\mathcal{F}$ her;
b) Sie zeigen, dass $F(u,u') - u' F_p(u,u') = const.$ auf $[a,b]$.

Aufgabe 4(*Minimalflächen vom Rotationstyp*) (4 Punkte)

Sei $u : [0,b] \to \mathbb{R}$ eine C^1 Funktion. Die durch

$$(x, u(x)\cos\theta, u(x)\sin\theta)$$

definierte Flache $f : [0,b] \times [0,2\pi] \in \mathbb{R}^3$ ist eine Fläche vom Rotationstyp.

a) Sie zeigen, dass die Flächeninhlat von f

$$\mathcal{A}(u) = 2\pi \int_0^b u\sqrt{1 + u'(x)^2} dx$$

ist.

b) Mit Hilfe der Aufgabe 3 (b) finden Sie die Lösung der Miminierer von

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^b u\sqrt{1+u'(x)^2}dx$$

in $\mathcal{C} := \{u \in C^1([0,b]) \mid u(0) = 1, u(b) = B\}$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Dienstag, 20.5., vor der Vorlesung**.