Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung SS 2014, Serie 04
Prof. Dr. G. Wang 20.5.2014
Dr. R. Alessandroni

Aufgabe 1 (*starke und schwache lokale Minimalstelle*) (4 Punkte)

Gemäß Definition 2.5 ist $u \in \mathcal{C} \subset \mathcal{U} \subset X = (\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$
1) eine *schwache lokale* Minimalstelle von $\mathcal{F}$ in $\mathcal{C}$, fall $\exists \delta_0 > 0$ mit

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v), \quad \forall v \in \mathcal{C} \cap B_{\delta_0}(u; X).$$

2) eine *starke lokale* Minimalstelle von $\mathcal{F}$ in $\mathcal{C}$, fall $\exists \delta_0 > 0$ mit

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v), \quad \forall v \in \mathcal{C} \cap B_{\delta_0}(u; C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)).$$

Sie zeigen, dass
a) $u(x) = 0$ eine schwache lokale Minimalstelle von $\mathcal{F}(u) = \int_0^1 (u'(t)^2 - u'(t)^4)dt$ in $\mathcal{C} = \{u \in X \,|\, u(0) = u(1) = 0\}$ ist, wobei $X = C^1([0,1])$ ist;
b) aber $u(x) = 0$ keine starke lokale Minimalstelle ist.

(*Hinweis Betrachte die Folge* $(p < 1)$

$$u_{p,q} = \begin{cases} \frac{q}{p}t, & 0 \leq t \leq p \\ \frac{q}{p-1}(t-1), & p < t \leq 1 \end{cases}$$

und berechne $\mathcal{F}(u_{p,q})$ *mit* $p \to 1$. $u_{p,q}$ *lassen sich durch* C^1 *Funktionen in* L^∞ *approximieren.*)

Aufgabe 2 (konvexe Funktionale) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet mit C^1-Rand, $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ konvex und $g \in C^0(\overline{\Omega})$. Betrachten Sie auf $\mathcal{C} = \{u \in C^1(\overline{\Omega}) : u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$ das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega (\phi(Du) + gu).$$

Zeigen Sie: u ist genau dann Minimierer von $\mathcal{F}$ in $\mathcal{C}$, wenn gilt:

$$\operatorname{div}\left[(D_p\phi)(Du)\right] = g.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 u'(x)^2 dx \quad \text{und} \quad \mathcal{G}(u) = \int_0^1 u^2(x) dx.$$

Man beweise die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) u ist globaler Minimierer für $\mathcal{F}$ in $D = C^{1,stw}[0,1] \cap \{u(0) = 0, u(1) = 0\}$ unter der Nebenbedingung $\mathcal{G}(u) = 1$.

ii) $u \in C^2[0,1]$, $\mathcal{G}(u) = 1$, $u'' + \lambda u = 0$ auf $[0,1]$, $u(0) = 0, u(1) = 0$,

$$\lambda \int_0^1 h^2 dx \leq \int_0^1 h'^2 dx \text{ für alle } h \in C_0^{1,stw}[0,1].$$

Man gebe u und $\lambda > 0$ unter der Annahme, dass (i) oder (ii) erfüllbar sind, explizit an.

Die Gleichung $\lambda \int_0^1 h^2 dx \leq \int_0^1 h'^2 dx$ heißt die Poincaré-Ungleichung.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Man berechne einen globalen Minimierer $u \in D = C^{1,stw}[0,1]$ für

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 (u')^2 dx$$

unter den isoperimetrischen Nebenbedingungen

$$\mathcal{G}_1(u) = \int_0^1 u^2 = 1 \quad \text{ und } \quad \mathcal{G}_2(u) = \int u dx = m,$$

sofern er existiert. Gilt bei Existenz eine Poincaré-Ungleichung for all $h \in C^{1,stw}[0,1] \cap \{\int_0^1 h dx = 0\}$?

Bemerkung. Die Existenz für $m^2 = 1$ ist klar und für $m^2 < 1$ kann sie mit den direkten Methoden, die wir später untersuchen werden, bewiesen werden.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Dienstag, 20.5., vor der Vorlesung**.