Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung — SS 2014, Serie 04
Prof. Dr. G. Wang — 27.5.2014
Dr. R. Alessandroni

Aufgabe 1 (*Geodätische*) (8 Punkte)

Durch die Gleichung $g(x_1, x_2, x_3) = 0$ sei eine Fläche S im $\mathbb{R}^3$ definiert. Als Geodätische von S bezeichnet man diejenigen (differenzierbaren) Kurven

$$t \mapsto x(t)(x_1(t), x_2(t), x_3(t)), \quad t \in [t_0, t_1],$$

für die das Funktional

$$I(x) := \int_{t_0}^{t_1} |x'(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum_{i=1}^{3} x_i'(t)^2 dt}$$

unter der Nebenbedingung $g(x_1, x_2, x_3) = 0$ einen minimalen Wert annimmt.
(a) Man stelle für das Problem die Euler-Lagrange-Gleichung auf und versuche eine geometrische Interpretation.
(b) Man Zeige: Die Geodätischen der Sphäre

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 - r^2 = 0$$

sind Großkreise.
(*Hinweis*. Man betrachte als Anfangspunkt o.E. $x(0) = (1, 0, 0)$ und namhe an, dass die Geodätische nach Bogen parametrisiert ist. Man zeige zunächst, dass der Lagrange-Multiplikator λ konstant ist.)
(c) Man bestimme die Geodätische von $A = (1, 0, 0)$ bis $B = (-1, 0, 1)$ auf dem Zylinder $Z = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\}$. Ist diese eindeutig bestimmt?

Aufgabe 2 (*Pendelgleichung*) (4 Punkte)

Man zeige, dass

$$\begin{cases} 2\lambda(t)x_1(t) - m\ddot{x}_1 &= 0 \\ -mg + 2\lambda(t)x_2(t) - m\ddot{x}_2 &= 0 \end{cases}$$

und die Pendelgleichung

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0 \tag{1}$$

äquivalent sind.
(*Hinweis*. Man zeige zunächst: Für eine Lösung θ von (1) gilt der Erhaltungssatz $\frac{1}{2} l \dot{\theta}^2 - g \cos\theta = const.$)

Aufgabe 3 (*Unterhalbstetigkeit der Norm*) (4 Punkte)

Man Zeige, dass jede schwach konvergente Folge ($u_k \rightharpoonup u$) beschränkt ist, und

$$\|u\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|$$

gilt.

Aufgabe 4 (*Minimierer*) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt und $f \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Man zeige, dass das Variationsproblem

$$\mathcal{F}(u) := \int_\Omega (\frac{1}{2}|Du|^2 - fu)dx \quad \text{in } \mathcal{U} = \{u \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^3) \,|\, \operatorname{div} u = 0 \text{ in } \Omega\}$$

einen eindeutigen Minimierer hat.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Dienstag, 3.6., vor der Vorlesung**.