Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung — SS 2014, Serie 06
Prof. Dr. G. Wang — 3.6.2014
Dr. R. Alessandroni

Aufgabe 1 (*Unterhalbstetigkeit*) (4 Punkte)

Es sei X ein metrischer (allgemeiner: topologischer) Raum und $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Funktion. f heißt *unterhalbstetig* in $x_0 \in X$, falls $f(x_0) \neq -\infty$, und falls es zu jedem reellen $r < f(x_0)$ eine Umgebung U von x_0 gibt, so dass für alle $x \in U$ gilt: $r < f(x)$.
a) Zeige: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ist unterhalbstetig genau dann, wenn $f^{-1}[(a, \infty)]$ offen ist für alle $a \in \mathbb{R}$.
b) Zeige: Das punktweise Supremum einer Familie in x_0 unterhalbstetiger Funktionen ist in x_0 unterhalbstetig.
c) Zeige: Ist (X, d) ein metrischer Raum, und ist $f : X \to [0, 1]$ unterhalbstetig, so gibt es eine monoton wachsende Folge stetiger Funktionen f_n, die punktweise gegen f konvergiert. (*Hinweis*: $f_n(x) = \inf\{f(y) + nd(x, y) | y \in X\}$.)

Aufgabe 2 (*Unterhalbstetigkeit des Längenfunktionals)* (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Längenfunktional $L(u) := \int_0^1 \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx$ unterhalbstetig bezüglich der schwachen Konvergenz in $W^{1,p}(I)$, wobei $I = (0, 1)$, $p \in (1, \infty)$, nicht aber stetig bezüglich dieser Konvergenz ist.
(*Hinweis*: Für ein Gegenbeispiel gegen die schwache Stetigkeit approximieren Sie eine konstante Funktion geeignet durch Zackenfunktionen)

Aufgabe 3 (*nichtkonvexe Funktionale*) (4 Punkte)

Betrachten Sie auf $W^{1,\infty}(I)$, $I = (0, 1)$, die Funktionale

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 (u_x^2 - 1)^2 \, dx \quad \text{und} \quad \mathcal{G}(u) = \int_0^1 \left((u_x^2 - 1)^2 + u^2 \right) dx$$

unter Nullrandbedingungen $u(0) = u(1) = 0$. Zeigen Sie:

(a) Beide Funktionale haben das Infimum Null. Während für $\mathcal{F}$ unendlich viele Minimierer existieren, nimmt $\mathcal{G}$ sein Infimum nicht an.

(b) Keines der beiden Funktionale ist unterhalbstetig bzgl. $u_k \to u$ gleichmäßig auf I, bzw. bzgl. $u_k' \to u'$ schwach$*$ in $L^\infty(I) = L^1(I)'$.

Aufgabe 4 (*Subdifferential)* (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine konvexe Funktion. Ein Vektor $g \in \mathbb{R}^n$ heißt *Subgradient* von f an der Stelle x_0, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt bezeichnet.
Das *Subdifferential* $\partial f(x_0)$ ist die Menge aller Subgradienten von f im Punkt x_0.

a) Zeige: Sei $f : R^n \to \mathbb{R}$ konvex, unterhalbstetig und $f \neq \infty$. Dann sind äquivalent:
1. $x^* \in \partial f(x_0)$.
2. $\langle x^*, z \rangle - f(z)$ nimmt sein Maximum bei $z = x_0$ an.

b) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x \leq 1 \\ (x-1)^2, & x > 1. \end{cases}$$

Bestimme das Subdifferential an der Stelle $x = 1$ und $x = 4$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Dienstag, 17.6., vor der Vorlesung**.