Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung SS 2014, Serie 07
Prof. Dr. G. Wang 17.6.2014
Dr. R. Alessandroni

Aufgabe 1 (*konvex und polykonvex*) (4 Punkte)
Finde ein Funktion $F = F(p)$, die polykonvex, aber nicht konvex ist.
(*Hinweis.* Aufgabe 3.1?)

Aufgabe 2 (*Divergenz-Struktur*) (4 Punkte)

Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $w \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Man zeige

$$\operatorname{div}(\operatorname{cof} Dw) = 0,$$

d.h.,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} (\operatorname{cof} Dw)_{ij} = 0, \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n$$

Aufgabe 3 (*Null-Lagrange-Funktion, Divergenz-Struktur)* (4 Punkte)
Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $u, v \in W_0^{1,n}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. mane zeige:

$$\int_\Omega \det(Du) dx = \int_\Omega \det(Dv) dx.$$

(*Bemerkung.* Eine Funktion $F : \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}$ mit dieser Eigenschaft, dass $\int_\Omega F(Du)$ nur von den Werten von u auf dem Rand $\partial\Omega$ abhängt, nennt man *Null-Lagrange-Function*)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $f \in L^2(\Omega)$. Zeige das duale Variationsprinzip:

$$\min_{w \in H_0^1(\Omega)} \int_\Omega (\frac{1}{2}|Dw|^2 - fw) dx = \max_{\xi \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n), \operatorname{div} \xi = f} -\frac{1}{2} \int_\Omega |\xi|^2 dx.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Dienstag, 23.6., vor der Vorlesung**.