Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung SS 2014, Serie 08
Prof. Dr. G. Wang 24.6.2014
Dr. R. Alessandroni

Aufgabe 1 (4+4 Punkte)
Sei $D = \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |z| < 1\}$.

(a) Zeigen Sie, dass $W^{1,2}(D, \mathbb{S}^2) = \{u \in W^{1,2}(D, \mathbb{R}^3) : |u(z)| = 1 \text{ fast überall}\}$ unter schwacher Konvergenz in $W^{1,2}(D, \mathbb{R}^3)$ abgeschlossen ist.

(b) Begründen Sie, dass das folgende Funktional für $\lambda \in [-1, 1]$ unter dieser Konvergenz unterhalbstetig ist ($\times$ bezeichnet das Kreuzprodukt):

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2} \int_D |Du|^2 + \lambda \int_D \langle u, \partial_1 u \times \partial_2 u \rangle.$$

(c) Berechnen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung von $\mathcal{F}$.

(d) Finden Sie ein Gegenbeispiel zur Unterhalbstetigkeit im Fall $|\lambda| > 1$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sie zeigen, dass man die Variationsungleichung (5.19)

$$\int_\Omega Du \cdot \nabla(w - u)dx \geq \int_\Omega f(w - u)dx \quad \forall w \in U := \{u \in H_0^1(\Omega) | u \geq h \text{ f. ü. in } \Omega\}$$

als das folgende Problem

$$-\Delta u + \beta(u - h) \ni f$$

darstellen kann, wobei

$$\beta(t) := \begin{cases} 0, & \text{falls } t < 0 \\ (-\infty, 0], & \text{falls } t = 0 \\ \emptyset, & \text{falls } t < 0 \end{cases}$$

eine Multi-Funktion ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
a) Sie zeigen, dass ein eindeutiges Minimum $u \in \mathcal{U}$ von

$$\mathcal{F}(w) := \int_\Omega (\frac{1}{2}|Dw|^2 - fw)dx$$

existiert, wobei $f \in L^2(\Omega)$ und $\mathcal{U} := \{w \in H_0^1(\Omega) \,|\, |Dw| \leq 1 \text{ f. ü. in } \Omega\}$.
b) Zeige

$$\int_\Omega Du \cdot D(w - u)dx \geq \int_\Omega f(w - u)dx, \quad \forall w \in \mathcal{U}.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Dienstag, 1.7., vor der Vorlesung**.