Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung — SS 2014, Serie 09
Prof. Dr. G. Wang — 1.7.2014
Dr. R. Alessandroni

Aufgabe 1 (4 Punkte)

X erfülle das 1. Abzählbarkeitsaxiom. Seien $\mathcal{F}, \mathcal{F}_n : X \to \mathbb{R}$ und $\mathcal{F} = \Gamma - \lim \mathcal{F}_n$. Sei $\inf_{v \in X} \mathcal{F}_n(v) > -\infty \ \forall n \in \mathbb{N}$. Sei u_n ein ϵ_n-Minimierer von $\mathcal{F}_n$. Seien $\epsilon_n \to 0$, $u_n \to u \in X$. Wir wissen schon in der Vorlesung, dass u Minimalstelle von $\mathcal{F}$ ist. Sie Zeigen, dass $\mathcal{F}(u) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}_n(u_n)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

X erfülle das 1. Abzählbarkeitsaxiom.
a) Es sei $\Gamma - \lim \mathcal{F}_k = F$ und $\mathcal{G} : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt $\Gamma - \lim(\mathcal{F}_k + \mathcal{G}) = \mathcal{F} + \mathcal{G}$.
b) Aus $\Gamma - \lim \mathcal{F}_k = \mathcal{F}$ und $\Gamma - \lim \mathcal{G}_k = G$ folgt nicht immer $\Gamma - \lim(\mathcal{F}_k + \mathcal{G}_k) = \mathcal{F} + \mathcal{G}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Seien $\mathcal{F}_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\mathcal{F}_\epsilon(x) = \epsilon x e^{-2\epsilon^2 x^2}$. Zeigen Sie, dass $\Gamma - \lim_{\epsilon\to\infty} \mathcal{F}_\epsilon = \mathcal{F}$ mit

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}e^{-1/2}, & \text{falls } x = 0, \\ 0, & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$$

$\mathcal{F}_\epsilon$ konvergiert punktweise gegen 0.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ stetig. Auf $\mathcal{U}_a := \{u \in L^1(0,1) : \int_0^1 u dx = a\}$ mit $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir das Funktional $\mathcal{F} : \mathcal{U}_a \to [0, \infty)$ definiert durch

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 f(u) dx, \quad u \in \mathcal{U}_a.$$

a) Man zeige, dass $\inf_{u \in \mathcal{U}_a} \mathcal{F}(u) = Cf(a)$, wobei Cf die konvexe Einhüllende von f bezeichnet.
b) Wird das Infimum von $\mathcal{F}$ in $\mathcal{U}_a$ immer angenommen? Begründen Sie Ihre Antwort.
c) Geben Sie ein Beispiel für ein f an, so dass das Minimierungsproblem $\mathcal{F} \to \min$ in $\mathcal{U}_a$, aber nicht in $\mathcal{U}_a \cap C^0([0,1])$, lösbar ist.
Hinweis: Sie können für a) ohne Beweis benutzen, dass

$$Cf(z) = \inf\{\lambda f(z_1) + (1-\lambda) f(z_2) : z = \lambda z_1 + (1-\lambda) z_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}; \lambda[0,1]\}.$$

für alle $z \in \mathbb{R}$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Dienstag, 8.7., vor der Vorlesung**.