

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Sei $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. F ist *unterhalbstetig* in $x \in X$, falls für alle $t < F(x)$ existiert eine Umgebung $U \in \mathcal{N}(x)$ mit $t < F(y)$, $\forall y \in U$. Hierbei ist $\mathcal{N}(x)$ die Menge aller Umgebungen von x .

- Sie Zeigen, dass F ist genau dann unterhalbstetig in $x \in X$, wenn $F(x) = \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \inf_{y \in U} F(y)$.
- X erfülle die 1. Abzählbarkeitsaxiom. Sie Zeigen, dass F ist genau dann unterhalbstetig in $x \in X$, wenn $F(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$ für alle Folge x_n mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.
- Sie Zeigen, dass $cs^-F(x) = \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \inf_{y \in U} F(y)$.
- X erfülle die 1. Abzählbarkeitsaxiom. Dann ist cs^-F die Γ -Limes von F_n mit $F_n = F$.

Aufgabe 2

(4 Punkte)

Sei $\Omega = \Pi_{i=1}^n (a_i, b_i)$ ein offener Quader in \mathbb{R}^n und sei $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Wir erweitern nun f periodisch auf ganz \mathbb{R}^n und definieren für $k \in \mathbb{N}$ $f_k(x) := f(kx)$. Sie Zeigen, dass für $1 \leq p < \infty$

$$f_k \rightharpoonup \bar{f} := \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x) dx \text{ in } L^p(\Omega) \text{ für } k \rightarrow \infty$$

gilt, durch

- $\|f_k\|_p \leq M$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_D f_k(x) dx = \int_D f(x) dx$ für alle achsenparallelen Würfel $D \subset \Omega$.
- $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall E \subset \Omega$ messbar, $|E| < \delta \forall k \in \mathbb{N}: \int_E |f_k|^p dx < \epsilon$.

Aufgabe 3

(4 Punkte)

a) Sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion definiert durch

$$h(x) = \begin{cases} a & \text{falls } 0 \leq x < \lambda \\ b & \text{falls } \lambda \leq x < 1. \end{cases}$$

Setze h periodisch auf ganz \mathbb{R} fort und definiere $w_j(x) = h(jx)$. Bestimmen Sie das durch $\{w_j\}$ erzeugte Young Maß.

b) Sei $h : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Setze h periodisch auf ganz \mathbb{R}^n fort und definiere $w_j(x) = h(jx)$. Bestimmen Sie das durch $\{w_j\}$ erzeugte Young Maß.

Aufgabe 4

(4 Punkte)

Für eine Kurve $\{(x, u(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1]\}$ ist das Länge-Funktional definiert durch

$$\mathcal{L}(u) := \int_0^1 \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx.$$

Die Zick-Zack-Minimalfolge von \mathcal{L} ist

$$u_n(x) = \begin{cases} x - \frac{i}{n}, & \frac{i}{n} \leq x \leq \frac{i+\frac{1}{2}}{n}; \\ \frac{i+1}{n} - x, & \frac{i+\frac{1}{2}}{n} \leq x \leq \frac{i+1}{n}. \end{cases}$$

Sie bestimmen das durch $\{u_n\}$ erzeugte Young Maß.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 15.7., vor der Vorlesung.