Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung — SS 2014, Serie 12
Prof. Dr. G. Wang — 22.7.2014
Dr. R. Alessandroni

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, sternförmig bzgl 0 mit C^1 Rand. Sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u &= |u|^{p-1}u, \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0, \qquad \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Sei $p > \frac{n+2}{n-2}$. Zeige, dass $u = 0$.
(Man soll durch die Multiplikation der Gleichung von $x \cdot \nabla u$ berechnen, nicht die Pohozeav-Identität direkt verwenden.)

Aufgabe 2 (4+4 Punkte)

Seien B eine Kreisscheibe in $\mathbb{R}^2$ und $X \in H^1 \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3)$. Weiter sei $V : H^1 \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ ein Funktional

$$V(X) := \frac{1}{3}\int_B X \cdot (X_u \wedge X_v) dw, \quad w = (u, v) \in B.$$

Sie zeigen:

a) V ist wohl-definiert und C^1.

b) Für alle $X, \varphi, \psi \in H^1 \cap L^\infty(B, \mathbb{R}^3)$ gilt:

$$V(X + \varphi) = V(X) + \langle \delta V(X), \varphi\rangle + \frac{1}{2}\delta^2 V(X)(\varphi, \varphi) + V(\varphi),$$

wobei

$$\langle \delta V(X), \varphi\rangle = \frac{1}{3}\int_B \{(\varphi_u \wedge X_v + X_u \wedge \varphi_v) \cdot X + X_x \wedge X_v \cdot \varphi\} dw$$

$$\begin{aligned} \delta^2 V(X)(\varphi, \psi) &= \frac{1}{3}\int_B (\varphi_u \wedge \psi_v + \psi_u \wedge \varphi_v) \cdot X dw \\ &+ \frac{1}{3}\int_B (\varphi_u \wedge X_v + X_u \wedge \varphi_v) \cdot \psi + (\psi_u \wedge X_v + X_u \wedge \psi_v) \cdot \varphi dw. \end{aligned}$$

c) Falls $\rho, \varphi, \psi \in C^2(\overline{B}, \mathbb{R}^3)$, und falls eine der Funktionen ρ, φ, oder ψ auf ∂B verschwindet, dann gilt

$$\int_B (\varphi_u \wedge \psi_v + \psi_u \wedge \varphi_v) \cdot \rho dw = \int_B \varphi_u \wedge \rho_v + \rho_u \wedge \varphi_v) \cdot \psi dw.$$

(*Hinweis: Sie benutzen die partielle Integration und die Schiefsymmetrie* $a \wedge b = -b \wedge a$.)

d) V ist invariant unter der Orientirungserhaltende Umparametrisierungen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Der Integrand von (8.6)

$$(|X_u|^2 - |X_v|^2)(\psi_{1,u} - \psi_{2,v}) + 2X_u \cdot X_v(\psi_{1,v} + \psi_{2,u})$$

ist gleich $\Re(\Phi \cdot \bar{\partial}\psi)$, wobei $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ ist und

$$\Phi(w) := |X_u|^2 - |X_v|^2 - 2iX_u \cdot X_v$$

die holomorphe Funktion im Hilfssatz 8.4 ist. Daraus folgt

$$\int_B (|X_u|^2 - |X_v|^2)(\psi_{1,u} - \psi_{2,v}) + 2X_u \cdot X_v(\psi_{1,v} + \psi_{2,u}) = \int_{\partial B} \Re(\Phi \cdot w\psi) ds.$$

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Dienstag, 29.7., vor der Vorlesung**.