

---

**Aufgabe 1** (*starke und schwache lokale Minimalstelle*) (4 Punkte)

Gemäß Definition 2.5 ist  $u \in \mathcal{C} \subset \mathcal{U} \subset X = (\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$

1) eine *schwache lokale* Minimalstelle von  $\mathcal{F}$  in  $\mathcal{C}$ , falls  $\exists \delta_0 > 0$  mit

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v), \quad \forall v \in \mathcal{C} \cap B_{\delta_0}(u; X).$$

2) eine *starke lokale* Minimalstelle von  $\mathcal{F}$  in  $\mathcal{C}$ , falls  $\exists \delta_0 > 0$  mit

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v), \quad \forall v \in \mathcal{C} \cap B_{\delta_0}(u; C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)).$$

Sie zeigen, dass

a)  $u(x) = 0$  eine schwache lokale Minimalstelle von  $\mathcal{F}(u) = \int_0^1 (u'(t)^2 - u'(t)^4) dt$  in  $\mathcal{C} = \{u \in X \mid u(0) = u(1) = 0\}$  ist, wobei  $X = C^1([0, 1])$  ist;

b) aber  $u(x) = 0$  keine starke lokale Minimalstelle ist.

(Hinweis Betrachte die Folge ( $p < 1$ ))

$$u_{p,q} = \begin{cases} \frac{q}{p}t, & 0 \leq t \leq p \\ \frac{q}{p-1}(t-1), & p < t \leq 1 \end{cases}$$

und berechne  $\mathcal{F}(u_{p,q})$  mit  $p \rightarrow 1$ . Die Funktionen  $u_{p,q}$  lassen sich durch  $C^1$  Funktionen in  $L^\infty$  approximieren.)

**Aufgabe 2** (*Minimumproblem ohne Lösung*) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 \left( (u'^2(x) - 1)^2 + u(x)^2 \right) dx$$

sein Infimum auf  $C^1((0, 1))$  nicht annimmt.

**Aufgabe 3** (*Kapillarflächen*) (4 Punkte)

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränktes Gebiet mit  $C^1$ -Rand. Betrachte für  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  und  $\kappa, \sigma \in \mathbb{R}$  das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} + \frac{\kappa}{2} \int_{\Omega} u^2 + \sigma \int_{\partial\Omega} u \, d\mu.$$

Es gelte

$$\delta\mathcal{F}(u, \varphi) = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C^2(\overline{\Omega}).$$

Berechnen Sie die resultierenden Gleichungen in  $\Omega$  sowie auf  $\partial\Omega$ , und interpretieren Sie die Randbedingung geometrisch, ähnlich wie in Bsp 2.32.

**Aufgabe 4** (*keine schwache lokale Minimalstelle*)

(4 Punkte)

Sei  $\mathcal{F}(u) := \int_{-1}^1 (x^2 u'(x)^2 + x u'(x)^3) dx$ . Es gilt

$$\delta\mathcal{F}(0, \xi) = 0, \forall \xi \in C_0^1([-1, 1]), \quad \delta^2\mathcal{F}(0, \xi) > 0, \forall 0 \neq \xi \in C_0^1([-1, 1]),$$

aber  $u = 0$  ist keine schwache lokale Minimalstelle.

*Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 30.10., vor der Vorlesung.*