
Aufgabe 1 (*Unterhalbstetigkeit des Längenfunktional*) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Längenfunktional $L(u) := \int_0^1 \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx$ unterhalbstetig ist bezüglich der schwachen Konvergenz in $W^{1,p}(I)$, $p \in (1, \infty)$, nicht aber stetig bezüglich dieser Konvergenz.

(*Hinweis*: Für ein Gegenbeispiel gegen die schwache Stetigkeit approximieren Sie eine konstante Funktion geeignet durch Zackenfunktionen.)

Aufgabe 2 (*nichtkonvexe Funktionale*) (4 Punkte)

Betrachten Sie auf $W^{1,\infty}(I)$, $I = (0, 1)$, die Funktionale

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 (u_x^2 - 1)^2 dx \quad \text{und} \quad \mathcal{G}(u) = \int_0^1 ((u_x^2 - 1)^2 + u^2) dx$$

unter Nullrandbedingungen $u(0) = u(1) = 0$. Zeigen Sie:

- Beide Funktionale haben das Infimum Null. Während für \mathcal{F} unendlich viele Minimierer existieren, nimmt \mathcal{G} sein Infimum nicht an.
- Keines der beiden Funktionale ist unterhalbstetig bzgl. $u_k \rightarrow u$ gleichmäßig auf I , bzw. bzgl. $u'_k \rightarrow u'$ schwach* in $L^\infty(I) = L^1(I)'$.

Aufgabe 3 (*konvex und polykonvex*) (4 Punkte)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $F_\alpha : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F_\alpha(x, z, p) = \alpha |p|^2 + \det(p)$$

mit $p = (p_{ij}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, wobei $|p|^2 = \sum_{i,j=1}^2 p_{ij}^2$.

- Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die F_α die Legendre-Hadamard Bedingung erfüllt.
- Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist F_α konvex, bzw. polykonvex?

Aufgabe 4 (*Subdifferential*) (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine konvexe Funktion. Ein Vektor $g \in \mathbb{R}^n$ heißt *Subgradient* von f an der Stelle x_0 , wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt bezeichnet.

Das *Subdifferential* $\partial f(x_0)$ ist die Menge aller Subgradienten von f im Punkt x_0 .

a) Zeigen Sie: Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, unterhalbstetig, und $f \neq \infty$. Dann sind äquivalent:

1. $x^* \in \partial f(x_0)$.
2. $\langle x^*, z \rangle - f(z)$ nimmt sein Maximum bei $z = x_0$ an.

b) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x \leq 1 \\ (x - 1)^2, & x > 1 \end{cases}$$

Bestimmen Sie das Subdifferential an der Stelle $x = 1$ und $x = 4$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 27.11., vor der Vorlesung.