Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung — WS 23/24, Serie 01
Prof. Dr. G. Wang — 18.10.2023
M.Sc. Ch. Schmidt

Aufgabe 1 (*Berechnung der Gâteaux-Ableitung*) (0 Punkte)

Berechnen Sie die Gâteaux-Ableitung von

$$\mathcal{F} : C^0([0,T]) \to \mathbb{R},\ \mathcal{F}(u) = \int_0^T u(s)^2 ds.$$

Aufgabe 2 (*Gâteaux- und Fréchet-Differenzierbarkeit*) (0 Punkte)

Es seien

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \begin{cases} 0, & \text{für } u = 0, \\ \frac{u_1 u_2}{u_1^2 + u_4^2}, & \text{für } u \neq 0 \end{cases}$$

und $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ G(u) = F(u)^2$. Zeigen Sie:

a) Die erste Variation $\delta F(0,\xi)$ existiert $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^2$, aber F ist an der Stelle $u = 0$ nicht Gâteaux-differenzierbar.

b) G ist Gâteaux-differenzierbar, aber nicht Fréchet-differenzierbar.

Aufgabe 3 (*p-harmonische Funktionen*) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Die p-Energie von $u \in C^1(\overline{\Omega})$ ist definiert durch

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |Du|^p \quad \text{mit } 1 < p < \infty.$$

Berechnen Sie die erste Variation des Funktionals $\mathcal{E}(u)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei die Lagrange-Funktion $F : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Man zeige, dass $\mathcal{F} : C^{1,stw}([a,b]) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\mathcal{F}(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x)) dx,$$

ein stetiges Funktional ist.

Hierbei ist:

$$C^1([a,b]) = \{u \,|\, u \in C([a,b]), u \text{ ist auf } [a,b] \text{ differenzierbar, } u' \in C([a,b])\},$$

wobei in den Randpunkten die einseitigen Ableitungen zu nehmen sind und:

$$C^{1,stw}([a,b]) = \{u \,|\, u \in C([a,b]), u \in C^1([x_{i-1}, x_i]), i = 1, 2, \cdots, m\},$$

wobei $a = x_0 < x_1 \cdots < x_m = b$ eine von u abhängige Unterteilung von $[a,b]$ ist. Eine Funktion in $C^{1,stw}([a,b])$ heißt auf $[a,b]$ *stückweise differenzierbar*.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 23.10.2023 vor der Vorlesung**.