Übungsaufgaben zur Vorlesung
Variationsrechnung — WS 23/24, Serie 02
Prof. Dr. G. Wang — 23.10.2023
M.Sc. Ch. Schmidt

Aufgabe 1 (*starke und schwache lokale Minimalstelle*) (4 Punkte)

Gemäß Definition 2.19 ist $u \in \mathcal{C} \subset \mathcal{U} \subset X = C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$:
1) eine *schwache lokale* Minimalstelle von $\mathcal{F}$ in $\mathcal{C}$, falls: $\exists\, \delta_0 > 0$ mit

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v), \quad \forall v \in \mathcal{C} \cap B_{\delta_0}(u; X).$$

2) eine *starke lokale* Minimalstelle von $\mathcal{F}$ in $\mathcal{C}$, falls: $\exists\, \delta_0 > 0$ mit

$$\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(v), \quad \forall v \in \mathcal{C} \cap B_{\delta_0}(u; C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)).$$

Zeigen Sie:

a) $u(x) = 0$ ist eine schwache lokale Minimalstelle von $\mathcal{F}(u) = \int_0^1 (u'(t)^2 - u'(t)^4) dt$ in $\mathcal{C} = \{u \in X \mid u(0) = u(1) = 0\}$ mit $X = C^1([0,1])$.

b) $u(x) = 0$ ist keine starke lokale Minimalstelle .
(*Hinweis Betrachte die Folge* $(p < 1)$

$$u_{p,q} = \begin{cases} \frac{q}{p} t, & 0 \leq t \leq p \\ \frac{q}{p-1}(t-1), & p < t \leq 1 \end{cases}$$

und berechne $\mathcal{F}(u_{p,q})$ *mit* $p \to 1$. *Die* $u_{p,q}$ *lassen sich durch* C^1*-Funktionen geeignet approximieren.*)

Aufgabe 2 (*Minimierungsproblem ohne Lösung*) (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 \left(\left(u'^2(x) - 1 \right)^2 + u(x)^2 \right) dx$$

sein Infimum auf $C^1([0,1])$ nicht annimmt.

b) Sei $\mathcal{F}(u) := \int_{-1}^1 (x^2 u'(x)^2 + x u'(x)^3) dx$. Es gilt:

$$\delta\mathcal{F}(0, \xi) = 0 \;\; \forall \xi \in C_0^1([-1,1]), \quad \delta^2\mathcal{F}(0,\xi) > 0 \;\; \forall\, 0 \neq \xi \in C_0^1([-1,1]).$$

Zeigen Sie, dass $u(x) = 0$ aber keine schwache lokale Minimalstelle von $\mathcal{F}$ ist.

Aufgabe 3 (*Kapillarflächen*) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet mit C^1-Rand. Betrachte für $u \in C^2(\overline{\Omega})$ und κ, $\sigma \in \mathbb{R}$ das Funktional

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega \sqrt{1 + |Du|^2} + \frac{\kappa}{2} \int_\Omega u^2 + \sigma \int_{\partial\Omega} u \, d\mu.$$

Es gelte

$$\delta\mathcal{F}(u, \varphi) = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C^2(\overline{\Omega}).$$

Berechnen Sie die resultierenden Gleichungen in Ω sowie auf $\partial\Omega$, und interpretieren Sie die Randbedingung geometrisch, ähnlich wie in Bsp 2.32.

Aufgabe 4 (*EL-Gleichung*) (4 Punkte)

Betrachten Sie $\mathcal{F}(u) := \int_a^b F(u(x), u'(x))dx$, d.h. die Lagrange-Funktion F ist nicht von x abhängig.

a) Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichung von $\mathcal{F}$ her.

b) Sei u eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung von $\mathcal{F}$. Zeigen Sie:

$$F(u, u') - u' F_p(u, u') = \text{const. auf } [a, b].$$

(*Wir nehmen an, dass F und u geeignete Regularität haben.*)

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 30.10.2023 vor der Vorlesung**.