

**Aufgabe 1** (*gleichmäßige Konvexität von  $L^p$* )

Zeigen Sie für  $x \in [-1, 1]$  die folgenden Ungleichungen:

$$\frac{1}{2}(1 + |x|^p) - \left| \frac{1+x}{2} \right|^p \geq \begin{cases} c(p)(1-x)^p & \text{für } 2 \leq p < \infty \\ c(p)(1+|x|)^{p-2}(1-x)^2 & \text{für } 1 < p \leq 2. \end{cases}$$

Folgern Sie für  $u, v \in L^p(\mu)$

$$\frac{1}{2}(\|u\|_{L^p}^p + \|v\|_{L^p}^p) - \left\| \frac{u+v}{2} \right\|_{L^p}^p \geq \begin{cases} c(p)\|u-v\|_{L^p}^p & \text{für } 2 \leq p < \infty \\ c(p)(\|u\|_{L^p}^{p-2} + \|v\|_{L^p}^{p-2})\|u-v\|_{L^p}^2 & \text{für } 1 < p \leq 2. \end{cases}$$

**Aufgabe 2** (*Kompaktheit der Einheitskugel*)

Sei  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbertraum, also ein Euklidischer Vektorraum, der bezüglich der Norm  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  vollständig ist. Zeigen Sie: die Einheitskugel

$$K = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

ist genau dann folgenkompakt, wenn  $X$  endlichdimensional ist.

*Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 14.11.2011 vor der Vorlesung.*