Aufgabe 1 (*Rektifizierbarkeit und Berechnung der Bogenlänge*)

(1) Entscheiden Sie, ob die folgenden Kurven $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ rektifizierbar sind.

$$c(t) = \begin{cases} (t^2, t^2) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \left(\dfrac{1-t}{2}, \dfrac{1-t}{2}\right) & \text{für } \frac{1}{2} < t \le 1. \end{cases}$$

$$c(t) = \begin{cases} \left(t, t \sin \dfrac{1}{t}\right) & \text{für } 0 < t \le 1, \\ (0,0) & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

(2) Betrachten Sie eine in Polarkoordinaten gegebene Kurve

$$c(t) = (r(t) \cos \varphi(t), r(t) \sin \varphi(t)), \quad t \in I = [a,b],$$

wobei $r \in C^1(I, \mathbb{R}^+)$ und $\varphi \in C^1(I)$. Zeigen Sie

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2 \varphi'(t)^2}\, \mathrm{d}t.$$

Spezialisieren Sie sich auf $I = [0, 4\pi]$ und $r(t) = \varphi(t) = t$. Fertigen Sie eine Zeichnung an und berechnen Sie die Länge.

Aufgabe 2 (*C^k-Regularität der Umparametrisierung*)
Seien $c_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ und $c_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ reguläre C^k-Kurven für ein $k \ge 1$. Zeigen Sie: ist $c_2 = c_1 \circ \varphi$ für ein $\varphi : I_2 \to I_1$ stetig, so gilt bereits $\varphi \in C^k$.

Aufgabe 3 (*Strecken sind kürzeste Verbindungen*)
Seien $p, q \in \mathbb{R}^n$ und $c : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $c(t) = (1-t)p + tq$.

(1) Für jede stückweise C^1-Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$ gilt

$$L(\gamma) \ge L(c) = |p - q|.$$

(2) Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $\gamma = c \circ \varphi$ für eine nichtfallende Funktion $\varphi : [a,b] \to [0,1]$ mit $\varphi(a) = 0$ und $\varphi(b) = 1$.

Abgabe Dienstag, 04.05.2021 im ILIAS-Abgabetool Ihres Tutorates.